

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK
KÖNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

L. KÖTET



BUDAPEST, 1943

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT



50255

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

ÖTVENEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

	Oldal
BL. DOLAPCSIEV: A felületi görbék egy fajtájáról. Hengerre írt láncgörbék	24
— Eine Art von Flächenkurven. Zylinderkettenlinien	28
FARAGÓ PÉTER: Elektronok polarizációja	88
— Über die Polarisation der Elektronen	114
FÉJES LÁSZLÓ: Egy gömbfelület befedése egybevágó gömbsüvegekkel	40
— Über die Bedeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten	46
FÉRENCZI ZOLTÁN: Egy hatványsor konvergenciája	29
— Über die Konvergenz einer Potenzreihe	33
GÁSPÁR REZSŐ: Intenzitáseloszlás az AgH molekula $^1\Sigma-^1\Sigma$ pertubált sávrendszerében	290
— Die Intensitätsverteilung im $^1\Sigma-^1\Sigma$ gestörten Bandensystem des AgH Moleküls	318
GYULAI ZOLTÁN: Fizikatanítás és kísérlet	168
— Physikunterricht und Experiment	173
KALMÁR LÁSZLÓ: Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára	1
— Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem	23
KRAUSZ JÓZSEF: Egy Whitney-féle gráf-tétel új bizonyítása	75
— Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les réseaux	85
MAKAI ENDRE: A rácsháromszögekről és rácsparallelogrammákról	47
— Über Gitterdreiecke und Gitterparallelogramme	50
NAGY L. JÓZSEF: Galilei kísérletei az ütés erejének és energiájának a megismerésére	162
— Galileis Experimente zum Messen der Kraft des Schlages	167
ORTVAY RUDOLF: Newton és korunk tudománya	262
— Isaak Newton und die Wissenschaft der Gegenwart	287
IFJ. SOMOGYI ANTAL: Kicsiny görbületű folyadékszférák alakjának vizsgálata	320
— Untersuchungen über die Gestalt wenig gekrümmter Flüssigkeits-Oberflächen	369

	Oldal
SURÁNYI JÁNOS: A logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájának redukciójáról.....	51
— Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalküls	73
SZELE TIBOR: Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban	223
— Kombinatorische Untersuchungen über den gerichteten vollständigen Graphen	255
VALATIN JÁNOS: A kétatomos molekula tárgyalása a kétcentrummodell nélkül	115
— Discussion of diatomic molecules without the twocenter model	160
VARGA OTTÓ: Az állandó görbületű Riemann-féle terek egyik jellemzési módjáról	34
— Über eine Charakterisierung der Riemann'schen Räume konstanter Krümmung	39
WALDAFFEL LÁSZLÓ: A permutációk profiljáról	257
— Über das Profil der Permutationen	261
ZIGÁNY FERENC: Klug Lipót munkássága	205
*	
Jelentes az 1943. évi Klug Lipót jutalomról	86
Kitűzött feladatok (17—22)	174, 370
Megoldott feladatok (9—16)	175, 371
Irodalom	185, 381
Társulati élet	194
Tanulmányversenyek	384

50255

XII

238

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

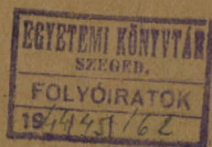
L. KÖTET

1943

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1943

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT



TARTALOMJEGYZÉK.

	Oldal
KALMÁR LÁSZLÓ: Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára.....	1
BL. DOLAPCSIEV: A felületi görbék egy fajtájáról	24
FERENCZI ZOLTÁN: Egy hatványsor konvergenciája.....	29
VARGA OTTÓ: Az állandó görbületű Riemann-féle terek egyik jellemzési módjáról	34
FEJES LÁSZLÓ: Egy gömbfelület befedése egybevágó gömbsüvegekkel.....	40
MAKAI ENDRE: A rácsháromszögekről és rácsparallelogrammákról	47
SURÁNYI JÁNOS: A logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájának redukciójáról	51
KRAUSZ JÓZSEF: Egy Whitney-féle gráf-tétel új bizonyítása	75
Jelentés az 1943. évi Klug Lipót jutalomról	86
FARAGÓ PÉTER: Elektronok polarizációja.....	88
VALATIN JÁNOS: A kétatomos molekula tárgyalása a kétcentrummodell nélkül.....	115
NAGY JÓZSEF: Galilei kísérletei az ütés erejének és energiájának megmérésére	162
GYULAI ZOLTÁN: Fizikatanítás és kísérlet.....	168
Kitűzött feladatok (17—19)	174
Megoldott feladatok (9—12).....	175
Irodalom	185
Társulati élet	194
Pénztárosi kimutatás a befolyt összegekről	202

EGYSZERŰ PÉLDA ELDÖNTHETETLEN ARITMETIKAI PROBLÉMÁRA.

GÖDEL¹ adta az első példát olyan aritmetikai problémára, amely az aritmetika (és logika) eszközeivel² megfogalmazható,³ de — amennyiben a kérdéses eszközök nem vezethetnek ellentmondásra⁴ — el nem dönthető.⁵ GÖDEL meggondolásából vilá-

¹ K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), 173—198. 1.

² Hogy mit értünk bizonyos eszközökkel (pl. az aritmetika és a logika eszközeivel) megfogalmazható, ill. eldönthető problémán, azt úgy lehet pontosan meghatározni, hogy a kérdéses eszközöket axiomatizáljuk; l. pl. KALMÁR LÁSZLÓ: A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 48 (1941), 65—119, különösen 71—77. l. GÖDEL az A. WHITEHEAD—B. RUSSELL, *Principia Mathematica* (Cambridge, 2. kiadás: 1925) axiómarendszerét használja.

³ Ha egy probléma nem fogalmazható meg bizonyos eszközökkel, akkor nyilvánvaló, hogy el sem dönthető segítségükkel. Ezért nem vezet célhoz a következő, gyakran említett heurisztikus gondolatmenet: adott eszközökkel (pontosan: adott axiómarendszerben) csak megszámlálható sok probléma dönthető el, a valós számok halmaza nem megszámlálható, tehát van «transzcendens-e α ?» alakú probléma, ahol α valós szám, amely nem dönthető el. Ugyanis ez a probléma csak akkor fogalmazható meg, ha α definiálható (a többi valós számoktól valami jellemző tulajdonságával megkülönböztethető) a kérdéses eszközökkel, már pedig ez csak megszámlálható sok α -ra áll és el lehetne gondolni, hogy ezekre mindre eldönthető a transzcendencia-probléma. Hasonló okból hiányos P. FINSLER, *Formale Beweise und Entscheidbarkeit*, *Mathematische Zeitschrift*, 25 (1926), 676—682. l., példája; az, hogy a példa a kérdéses eszközökkel megfogalmazható legyen, csak olyan erős feltevésekkel biztosítható, amelyek mellett FINSLER eredménye illuzórius, mert e feltevések mellett a kérdéses eszközökkel a RICHARD-féléhez hasonló ellentmondás adódik.

⁴ Ez a feltétel pontosan úgy fogalmazandó, hogy ne legyen olyan, a természetes számokon átfutó n változót tartalmazó $\mathfrak{F}(n)$ állítás, hogy

gos, hogy ez nem az aritmetika és logika módszerei (megszüntethető) hiányosságának következménye, hanem bármely axiómarendszerhez, ha csak bizonyos nagyon tág feltételeknek⁶ eleget tesz, szerkeszthető hasonló, a kérdéses axiómarendszerben kifejezhető, de el nem dönthető aritmetikai probléma.

GÖDEL példáját sikerült egyszerűsíteni; az egyszerűsített példa különösen alkalmas olyan megfogalmazásra, hogy a matematika alapjaira vonatkozó előismeretek nélkül is meg lehessen érteni. Az alábbiakban igyekszem a példát így megfogalmazni.

1. Nevezzük *elemi függvényeknek*⁷ azokat az aritmetikai függvényeket,⁸ amelyek változóikból⁹ és 1-ből¹⁰ véges számú összeadás, aritmetikai kivonás, szorzás, aritmetikai osztás, szumma- és produktumképzés által jönnek létre. (Aritmetikai kivonáson x -ből és y -ből $|x-y|$ képezését, aritmetikai osztáson $[x/y]$ képezését értjük; itt $[]$ az egész rész jele, tehát $[x/y]$ az x -nek

«van oly n , hogy $\mathfrak{F}(n)$ áll», « $\mathfrak{F}(1)$ nem áll», « $\mathfrak{F}(2)$ nem áll», « $\mathfrak{F}(3)$ nem áll»,... mind bebizonyíthatók. Ezt a feltételt GÖDEL ω -ellentmondástalanságnak nevezi. B. ROSSER, *Extensions of some theorems of Gödel and Church, The Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), 87–91. l., megmutatta, hogy e helyett elegendő a közönséges ellentmondástalanságot feltenni, azaz azt, hogy ne legyen olyan \mathfrak{F} állítás, hogy \mathfrak{F} is, « \mathfrak{F} nem áll» is bebizonyítható legyen. E dolgozatban egyszerűség kedvéért az eredeti GÖDEL-féle feltételt használom.

⁵ Azaz a problémában kifejezett állításnak sem igaz, sem hamis volta be nem bizonyítható.

⁶ E feltételek pontos megfogalmazását l. D. HILBERT—P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, II (Berlin, 1939), 269–279. l. A jelen dolgozat módszerét felhasználva némileg még tágítani lehet a feltételeket.

⁷ PÉTER RÓZSA közölte velem, hogy e fogalmat CSILLAG PÁL vezette be az ő, rekurzív függvényekre vonatkozó, vizsgálatait egyszerűsítő, eddig közzé nem tett megjegyzéseiben.

⁸ Aritmetikai függvényen olyan függvényt értek, amelynek (minden) változója a nemnegatív egész számokon fut át és értékei is nemnegatív egész számok.

⁹ E változókat latin kis betűvel jelölöm; ezek tehát a nemnegatív egész számokon futnak át.

¹⁰ vagy ami ugyanaz, adott nemnegatív egész számokból (hiszen ezek az 1 segítségével így fejezhetők ki: $0 = |1-1|$, $2 = 1+1$, $3 = 1+1+1$ stb.).

y -nal való osztásakor adódó hányadost jelenti.¹¹ Példa gyanánt felsorolok néhány elemi függvényt annak illusztrálására, milyen változatos függvények állíthatók elő az említett hat eljárás (azaz lényegében a négy alpművelet) segítségével.¹²

$$x^n = \prod_{i=1}^n x;$$

$$\max(x, y) = [(x+y) + |x-y|] / 2;$$

$$\min(x, y) = [(x+y) - |x-y|] / 2.$$

Az utóbbi két függvény jelentése: x és y közül a nagyobbik, ill. a kisebbik; $x = y$ esetén a közös értékük. Valóban, $x \geq y$ esetén $|x-y| = x-y$, $(x+y) + |x-y| = 2x$, $(x+y) - |x-y| = 2y$; $x < y$ esetén pedig $|x-y| = y-x$, $(x+y) + |x-y| = 2y$, $(x+y) - |x-y| = 2x$.

$$\operatorname{sgn} x = \min(x, 1).$$

¹¹ Hogy függvényeink kivétel nélkül minden helyen értelmezve legyenek, állapodjunk meg abban, hogy $y = 0$ esetén $[x/y] = 0$ legyen.

¹² Kuriózumként megemlítem, hogy a szorzás és az aritmetikai osztás nélkülözhető, amennyiben kifejezhető az összeadás, aritmetikai kivonás és szummaképzés segítségével. Ugyanis $x \cdot y = \sum_{i=1}^y x$; továbbá

$$|(x+1) - |x-1|| = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ 2, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

és

$$\left| \sum_{i=0}^y i - y \right| = \begin{cases} 0, & \text{ha } y = 0, \\ 1, & \text{ha } y = 2, \end{cases}$$

úgy, hogy

$$\operatorname{sgn} x = \left| \sum_{i=0}^{|(x+1) - |x-1||} i - |(x+1) - |x-1|| \right| = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

végül

$$[x/y] = \sum_{i=1}^x |1 - \operatorname{sgn} |x - (i \cdot y + |x - i \cdot y|)||,$$

mert az összegnek csak azok a tagjai nem 0-sal, hanem 1-gyel egyenlők, amelyekben $x = i \cdot y + |x - i \cdot y|$, azaz $i \cdot y \leq x$; az ilyen i -k száma pedig $[x/y]$.

Jelentése:¹³ 0, ha $x = 0$ és 1, ha $x > 0$.

$$\text{res}(x, y) = |x - y \cdot [x/y]|.$$

Minthogy $[x/y]$ az x -nek y -nal való osztásának hányadosa, $\text{res}(x, y)$ ugyanezen osztás maradéka.¹⁴

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^x |1 - \text{sgn res}(x, i)|.$$

Ha i osztója x -nek, $\text{res}(x, i) = 0$, $1 - \text{sgn res}(x, i) = 1$; ha i nem osztója x -nek, akkor $\text{res}(x, i) > 0$, $\text{sgn res}(x, i) = 1$, $1 - \text{sgn res}(x, i) = 0$. Tehát $\sigma(x)$ annyi egység összege, ahány osztója van x -nek, vagyis az x osztóinak száma (1-et és x -et is beleértve).¹⁵

$$\text{prim } x = \text{sgn } |\sigma(x) - 2|.$$

Ha x prímszám, akkor¹⁶ $\sigma(x) = 2$, $\text{prim } x = 0$; ha x nem prímszám, akkor $\sigma(x) \neq 2$, $|\sigma(x) - 2| > 0$, $\text{prim } x = 1$.

$$\pi(x) = \sum_{i=0}^x |1 - \text{prim } i|$$

annyi egység összege, ahány prímszám 0, 1, 2, ..., x között van, vagyis az x -nél nem nagyobb prímszámok száma.

$$p_x = \sum_{i=0}^{2^x} i \cdot |1 - \text{prim } i| \cdot |1 - \text{sgn } |\pi(i) - x||.$$

¹³ Nem vezet félreértésre, ha ugyanúgy jelöljük, mint a *minden* *válós* x helyen értelmezett

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvényt, mert ha x nemnegatív (egész) szám, egybeesik ezzel.

¹⁴ Megállapodásunk (¹¹ jegyzet) következtében $y=0$ esetén $\text{res}(x, y)=x$.

¹⁵ Ha $x=0$, akkor $\sigma(x)=0$, mert «üres» összegben 0-t (és üres szorzaton 1-et) szokás érteni.

¹⁶ Az $x=1$ -et, amelyre $\sigma(x)=1$, nem szokás prímszámnak tekinteni.

Az összeg i -edik tagja akkor és csak akkor nem 0, ha $\text{prim } i=0$ (azaz i prímszám) és $\pi(i)=x$ (azaz i az x -edik prímszám). Mint-hogy 2^{2^x} -ig legalább x prímszám van,¹⁷ ez a tag valóban fellép és értéke i ; azaz p_x az x -edik prímszámot jelenti.¹⁸

$$\exp_n x = \sum_{i=1}^x |1 - \text{sgn res}(x, p_n^i)|.$$

Az összeg i -edik tagja 1, ha x osztható p_n^i -vel, különben 0. Ha x a p_n -nek pontosan k -adik hatványával osztható, akkor az $i=1, 2, \dots, k$ -nak megfelelő tagok valóban előfordulnak, hiszen $k < 2^k \leq p_n^k \leq x$, értékük 1, a többi tag értéke 0, tehát $\exp_n x = k$. Azaz $\exp_n x$ az x törzstényezős előállításában a p_n prímszám kitevőjét jelenti.¹⁹

$$\text{long } x = \sum_{i=1}^{\pi(x)} |1 - \text{sgn} \prod_{j=i}^{\pi(x)} \text{res}(x, p_j)|.$$

Ha p_r a legnagyobb prímszám, amellyel x osztható, akkor $r \leq \pi(x)$ (mert p_1, p_2, \dots, p_r biztosan x -nél nem nagyobb prímszámok). Ha $i=1, 2, \dots, r$, akkor az i -edik tag 1, mert a produktumnak a $j=r$ értékhez tartozó $\text{res}(x, p_r)$ tényezője biztosan 0; ha azonban $i > r$, akkor az i -edik tag 0, mert $j=i, i+1, \dots, \pi(x)$ esetén x nem lehet osztható p_j -vel, tehát a produktum egyik tényezője sem 0. E szerint a szumma r tagja 1, a többi 0, tehát $\text{long } x = r$, azaz x törzstényezős előállításának «hossza».²⁰ Maga a törzstényezős előállítás $x \neq 0$ esetén

$$x = \prod_{i=1}^{\text{long } x} p_i^{\exp_i x}.$$

¹⁷ Ugyanis $2, 2^1+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1, \dots, 2^{2^{x-1}}+1$ páronként relatív prímszámok (l. pl. G. PÓLYA—G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, II (Berlin, 1925), VIII. fejezet, 94. feladat, 133. l., megoldás, 342. l.), tehát törzstényezőik mind különbözőek; ezek összességükben legalább x prímszámot szolgáltatnak 2^{2^x} alatt.

¹⁸ $p_0 = 0$, mert nincsen olyan i prímszám, hogy $\pi(i) = 0$.

¹⁹ $x = 0$ esetén $\exp_n x = 0$ (üres összeg); $x \neq 0, n = 0$ esetén is $\exp_n x = 0$ (minden tag 0).

²⁰ $\text{long } 0 = 0$ (üres összeg).

Ennek felhasználásával számos, az elemi számelméletben előforduló függvény felírható elemi függvényként; pl. x osztóinak összege

$$s(x) = \prod_{i=1}^{\log x} [p_i^{\exp p_i x + 1} - 1 / (p_i - 1)].$$

2. Nevezzünk *elemi problémának* minden olyan problémát, amely arra vonatkozik, felveszi-e egy adott elemi függvény egy adott értéket. Pl. «négyzetszám-e 9?» (azaz felveszi-e x^2 a 9 értéket), «faktoriális-szám-e 20?» (azaz lehet-e $x! = 20$) elemi problémák; az elsőre nyilván «igen», a másodikra «nem» a válasz. Vannak nehezebben eldönthető elemi problémák is: pl. az, hogy felveszi-e $|\pi(2x+2) - \pi(x+1)|$ a 0 értéket, azaz előfordulhat-e, hogy $x+1$ és $2x+2$ (vagyis egy pozitív egész szám és kétszerese) között — a felső határt beleértve, az alsót nem — ne legyen prímszám. CSEBISSEFF tételéből²¹ tudjuk, hogy ez nem fordulhat elő. Azt azonban, hogy $|\pi((x+2)^2) - \pi((x+1)^2)|$ felveszi-e a 0 értéket, azaz, hogy előfordulhat-e, hogy két szomszédos pozitív egész négyzetszám között egy prímszám sincs, mindmáig nem sikerült eldönteni; szintúgy azt sem, felveszi-e $|(x+1)^{u+3} + (y+1)^{u+3} - (z+1)^{u+3}|$ a 0 értéket (FERMAT-probléma). Ugyancsak nem tudjuk, felveszi-e

$$\operatorname{sgn} \prod_{i=0}^{2x+4} (\operatorname{prim} i + \operatorname{prim} |(2x+4) - i|)$$

az 1 értéket, azaz lehet-e, hogy $2x+4$ (vagyis egy 2-nél nagyobb páros szám) ne legyen két prímszám (i és $2x+4-i$) összegére bontható (GOLDBACH-probléma).

Az alábbiakban megmutatom, hogy van olyan elemi probléma, amely egyáltalában nem dönthető el az aritmetika módszereivel.²²

²¹ P. TCHEBICHEFF, Mémoire sur les nombres premiers, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (1) 17 (1852), 366—390. l.; könnyebben hozzáférhető helyen l. pl. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig—Berlin, 1909), 89—92. l.

²² A probléma függ attól, mit értünk az aritmetika módszerein. Pontosabb megfogalmazás tekintetében l. a 2-6 lábjegyzeteket.

3. Az elemi függvények megszámlálható halmazt alkotnak. Ezt pl. a következőképpen láthatjuk be. Ha minden egyes elemi függvény definícióját explicite felírjuk (azaz benne 0 helyébe $|1-1|$ -et, 2 helyébe $1+1$ -et, 3 helyébe $1+1+1$ -et teszünk stb. és a definícióban szereplő már előbb definiált elemi függvények helyébe is definíciójukat írjuk s. i. t.), a törteket konzekvensen ferde törtvonallal jelöljük, végül a szummákat és produktumokat $\sum_{i=\alpha}^{\beta} \varphi(i)$ és $\prod_{i=\alpha}^{\beta} \varphi(i)$ helyett $\Sigma(\alpha \leq i \leq \beta) \varphi(i)$, ill. $\Pi(\alpha \leq i \leq \beta) \varphi(i)$ ($\alpha = 0$ esetén pedig egyszerűbben $\Sigma(i \leq \beta) \varphi(i)$, ill. $\Pi(i \leq \beta) \varphi(i)$) alakban írjuk (pl. $\operatorname{sgn} x = [|(x+1) - |x-1||/1+1]$, $\sigma(x) = \Sigma(1 \leq i \leq x) 1 - [|(x-i.[x/i]|+1) - ||x-i.[x/i]|-1|/1+1]$), akkor minden egyes elemi függvényhez hozzárendeltünk egy, az 1, +, -, |, ., /, [,], Σ , Π , (,), \leq jelekből, továbbá a független változók és a szumma- és produktumindexek gyanánt használt pl. $a, b, c, \dots, z, a', b', c', \dots, z', a'', b'', c'', \dots$ jelekből, tehát összesen megszámlálhatóan végtelen sok jelből²³ álló véges sorozatot (a definíciójában az = jel után álló jelek sorozatát), amely viszont egyértelműen meghatározza a kérdéses elemi függvényt. Már pedig megszámlálható sok jelből képezhető összes véges sorozatok halmaza megszámlálható.²⁴

Hasonlóan beláthatjuk, hogy az aritmetika és logika eszközeivel megfogalmazható állítások (mint pl. axiómák, tételek, sejtések, problémák) megszámlálható halmazt alkotnak. Valóban, minden ilyen állítás felírható az aritmetika és logika jeleivel,²⁵ tehát kölcsönösen hozzárendelhető bizonyos megszámlálható sok jelből alkotott véges sorozatok egyike.

²³ Egy-egy elemi függvény felírásához természetesen elég véges számú jel; azonban számítanunk kell akárhányváltozós függvényekre és akárhány-szoros szummákra és produktumokra.

²⁴ L. a 6. pontot is.

²⁵ Azoknak az állításoknak felírásához, amelyeket hozzá szoktak számítani az aritmetikához, bőven elegendő a már az elemi függvények felírásához is használt +, -, |, ., /, [,], Σ , Π , (,), \leq jeleken kívül az egyenlőség = jelét, továbbá a köznapi nyelvben a «nem», «és», «vagy», «ha... akkor», «akkor és csak akkor, ha», «minden x -re» és «van oly x , melyre» szavakkal kifejezett logikai vonatkozások számára egy-egy jelet (pl. rendre a \neg , $\&$, \vee , \rightarrow , \sim , (x) , $(\exists x)$ jeleket) bevezetni.

Végül az aritmetika összes bizonyításai is megszámlálható halmazt alkotnak; ugyanis minden bizonyítás állításokból (axiómákból és tételekből) álló véges sorozatnak tekinthető.

4. Legyenek

$$e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x), \dots \quad (1)$$

az összes egyváltozós elemi függvények, továbbá

$$B_1, B_2, \dots, B_n, \dots \quad (2)$$

az összes aritmetikai bizonyítások, valamilyen módon sorozatba rendezve. Tekintsük a következő problémákat: «felveszi-e $e_1(x)$ az 1 értéket?», «felveszi-e $e_2(x)$ a 2 értéket?», ..., «felveszi-e $e_n(x)$ az n értéket?», ...; nevezzük ezeket *átlós problémáknak*, mégpedig rendre az első, második, ..., n -edik, ... (vagy 1, 2, ..., n , ... indexű) átlós problémának. Ha valamelyik B bizonyítás pontosan azt bizonyítja be, hogy $e_n(x)$ nem veszi fel az n értéket (sem többet, sem kevesebbet, sem mást nem bizonyít be), akkor azt mondjuk, hogy B *negatív választ ad* az n -edik átlós problémára.

Definiáljuk az $f(x)$ aritmetikai függvényt a következőképpen. Ha a B_n bizonyítás negatív választ ad valamelyik átlós problémára, mégpedig az m -edikre,²⁶ akkor legyen $f(n) = m$; ha B_n egyik átlós problémára sem ad negatív választ (hanem valami mást bizonyít be), vagy ha $n=0$, akkor legyen $f(n)=0$.

Az $f(x)$ függvény természetesen más és más lesz a szerint, hogy hogyan választjuk az (1) és (2) sorozatbarendezéseket. Mármost ezeket lehet úgy választani, hogy $f(x)$ elemi függvény legyen. Ezt a továbbiak számára döntő ténytet plauzibilissá teszi az a megjegyzés, hogy az (1) és (2) sorozatbarendezéseket pusztán aritmetikai módszerekkel megadhatjuk. A 6. pontban még majd visszatérek erre a kérdésre.

Válasszuk tehát az (1) és (2) sorozatbarendezéseket úgy, hogy $f(x)$ elemi függvény legyen; legyen $f(x) = e_g(x)$. Ha m valamely $e(x)$ elemi függvény értéke valamely numerikusan adott n helyen, akkor $e(n) = m$ bebizonyítható, ha pedig m más, nume-

²⁶ Ha van ilyen m , akkor egyértelműen meg van határozva; hiszen minden bizonyításról egyértelműen leolvasható, mit bizonyít be.

rikusan adott érték, akkor $e(n)=m$ megcáfолható az aritmetika eszközeivel;²⁷ ennélfogva

(a) Ha a B_n bizonyítás az m -edik átlós problémára negatív választ ad, akkor $e_g(n)=m$ bebizonyítható.

(?) Ha a B_n bizonyítás nem ad az m -edik átlós problémára negatív választ, vagy ha $n=0$, $m \neq 0$, akkor $e_g(n) \neq m$ bebizonyítható.

Vessük fel mármost a g -edik átlós problémát, vagyis azt, vajjon felveszi-e $e_g(x)$ a g értéket. Ha valamely B_n bizonyítás negatív választ ad erre a problémára, akkor (a) szerint valamelyik B_m bizonyítás azt bizonyítja be, hogy $e_g(n)=g$; de

²⁷ Elemi függvény adott helyen felvett értékének kiszámítása (pl. az összeadás és a szorzás, a 0 alsó határú szumma- és produktumképezés

$$\begin{aligned} a + 0 &= a, \\ a + (b+1) &= (a+b) + 1, \\ a \cdot 0 &= 0, \\ a \cdot (b+1) &= a \cdot b + a, \\ \sum_{i=0}^0 \varphi(i) &= \varphi(0), \\ \sum_{i=0}^{a+1} \varphi(i) &= \sum_{i=0}^a \varphi(i) + \varphi(a+1), \\ \prod_{i=0}^0 \varphi(i) &= \varphi(0), \\ \prod_{i=0}^{a+1} \varphi(i) &= \prod_{i=0}^a \varphi(i) \cdot \varphi(a+1) \end{aligned}$$

rekurzív definíciójából, továbbá az aritmetikai kivonás és osztás

$$\begin{aligned} |(a+b) - a| &= b, \quad |a - (a+b)| = b, \\ [a/0] &= 0, \quad [(r+a+1) \cdot q + r] / (r+a+1) = q \end{aligned}$$

és a tetszőleges alsó határú szumma és produktum

$$\begin{aligned} \sum_{i=a+b+1}^a \varphi(i) &= 0, \quad \sum_{i=a+1}^{a+b+1} \varphi(i) = \left| \sum_{i=0}^{a+b+1} \varphi(i) - \sum_{i=0}^a \varphi(i) \right|, \\ \prod_{i=a+b+1}^a \varphi(i) &= 1, \quad \prod_{i=a+1}^{a+b+1} \varphi(i) = \left[\prod_{i=0}^{a+b+1} \varphi(i) / \prod_{i=0}^a \varphi(i) \right] \end{aligned}$$

definíciója segítségével aritmetikai bizonyításnak tekinthető. Két numerikusan adott különböző nemnegatív egész szám különbözősége (pl. a «ha $a+1=b+1$, akkor $a=b$ » és «ha a nemnegatív egész szám, akkor $a+1 \neq 0$ » PEANO-féle axiómák segítségével) bebizonyítható.



akkor B_n és B_m egymásnak ellentmondó eredményre vezetnek, hiszen B_n azt bizonyítja be, hogy $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket, B_m pedig azt, hogy $e_g(x)$ az $x=n$ helyen felveszi a g értéket. Viszont, ha valamely B_p bizonyítás arra az eredményre vezet, hogy $e_g(x)$ valamely numerikusan adott q helyen felveszi a g értéket, azaz $e_g(q)=g$, akkor tekintsük a B_q bizonyítást. Amennyiben ez negatív választ ad a g -edik átlós problémára, akkor B_p és B_q vezetnek egymással ellentmondó eredményre, mert B_q azt bizonyítja be, hogy $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket, B_p pedig azt, hogy $e_g(x)$ az $x=q$ helyen felveszi a g értéket. Amennyiben pedig B_q nem ad negatív választ a g -edik átlós problémára (vagy $q=0$), akkor (β) miatt valamelyik B_r bizonyítás azt adja, hogy $e_g(q) \neq g$, tehát ekkor B_p és B_r vezetnek egymással ellentmondó eredményre. E szerint

I. *Ha az aritmetika ellentmondástalan, akkor azt, hogy $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket, sem bebizonyítani nem lehet, sem ellenpéldát (azaz olyan q számértéket, hogy $e_g(q)=g$ bebizonyítható legyen) nem lehet rá adni az aritmetika eszközeivel.*

Mindamellettt el lehetne gondolni, hogy valamelyik B_s bizonyítás pozitív választ ad a g -edik átlós formulára, azaz azt bizonyítja be, hogy $e_g(x)$ valahol (valamely nemnegatív egész helyen) felveszi a g értéket. Ha most a B_1, B_2, \dots bizonyítások valamelyike negatív választ ad a g -edik átlós problémára, vagyis azt bizonyítja be, hogy $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket, akkor ez a bizonyítás a B_s -sel ellentmondó eredményre vezet. Ha pedig B_1, B_2, \dots egyike sem ad negatív választ a g -edik átlós problémára, akkor (β) szerint egy-egy $B_{t_0}, B_{t_1}, B_{t_2}, \dots$ bizonyítás rendre azt adja, hogy $e_g(0) \neq g, e_g(1) \neq g, e_g(2) \neq g, \dots$. Ekkor a $B_{t_0}, B_{t_1}, B_{t_2}, \dots$ bizonyítások a maguk összességében cáfolnák meg azt, amit B_s bebizonyít. Az ilyenfajta ellentmondást, amikor nem két, hanem végtelen sok bebizonyítható tétel (itt $e_g(0) \neq g, e_g(1) \neq g, e_g(2) \neq g, \dots$ és „ $e_g(x)$ valamely nemnegatív egész x helyen egyenlő g -vel») mond egymásnak ellent, ω -ellentmondásnak nevezzük (l. a ⁴ jegyzetet). E szerint

II. *Ha az aritmetika ω -ellentmondástalan, akkor azt, hogy $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket, sem bebizonyítani, sem megcáfolni nem lehet az aritmetika eszközeivel.*

Az I. és II. tételek lényegében (az eldönthetetlen «felveszi-e $e_g(x)$ a g értéket?» probléma egyszerűbb konstrukciójától eltekintve) GÖDEL-nek a dolgozat elején kimondott eredményét (az ú. n. első GÖDEL-féle bebizonyíthatatlansági tételt) fejezik ki.

5. Az eddigiekben az $e_g(x)$ függvénynek csak az (α) -ban és (β) -ban kifejezett tulajdonságát használtuk fel. Valójában több is igaz, t. i.

(α') Ha a B_n bizonyítás az m -edik átlós problémára negatív választ ad, akkor $e_g(n)=m$.

(β') Ha a B_n bizonyítás nem ad az m -edik átlós problémára negatív választ, vagy ha $n=0$, $m \neq 0$, akkor $e_g(n) \neq m$.

Ezek annyiban mondanak többet, mint (α) és (β) , mert — ha nem tesszük fel, hogy az aritmetika ellentmondástalan — el lehet képzelni, hogy $e_g(n)=m$, ill. $e_g(n) \neq m$ bebizonyítható, a nélkül, hogy valóban $e_g(n)=m$, ill. $e_g(n) \neq m$ volna. (Fent (α) -t, ill. (β) -t éppen (α') -vel, ill. (β') -vel s azzal indokoltuk, hogy elemi függvényekre vonatkozó numerikus relációk bebizonyíthatók az aritmetika eszközeivel.)

Az (α') és a (β') felhasználásával megpróbálhatjuk eldönteni, felveszi-e $e_g(x)$ a g értéket. Ha igen, pl. $e_g(n)=g$ valamely n helyen, akkor a B_n bizonyítás negatív választ ad a g -edik átlós formulára (mert ha nem adna, akkor (β') szerint $e_g(n) \neq g$ volna); azaz B_n arra a hibás (és megcáfолható) eredményre vezetne, hogy $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket. Azaz: ha az aritmetika ellentmondástalan, akkor $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket.

Mármost, ha nemcsak azt tennők fel, hogy az aritmetika ellentmondástalan, hanem azt is, hogy ellentmondástalanságára van aritmetikai bizonyítás,²⁸ akkor az előző bekezdés eredményének hipotetikus alakja megszüntethető volna, azaz az előző bekezdésben adott bizonyítás (az aritmetika ellentmondástalanságának bizonyításával együtt) annak aritmetikai bizonyítását adná, hogy $e_g(x)$ sehol sem veszi fel a g értéket, ellentétben I-gyel. Tehát

²⁸ Az aritmetika ellentmondástalansága, mint a 6. pont meggondolásai nyomán könnyen belátható, megfogalmazható az aritmetika eszközeivel.

III. Ha az aritmetika ellentmondástalan, akkor ellentmondástalansága nem bizonyítható be aritmetikai eszközökkel.

Ez a tétel GÖDEL «második bebizonyíthatatlansági tétele»;²⁹ bizonyítása GÖDEL-nél is lényegében ugyanez.

6. Azt, hogy az (1) és (2) sorozatbarendezések választhatók úgy, hogy a fent definiált $f(x)$ függvény elemi függvény legyen, a 4. pontban plauzibilissé tettem; pontos megmutatása megkívánja, hogy mélyebben beletekintsünk a lehetséges aritmetikai bizonyítások szerkezetébe. Itt csak vázolni fogom, hogyan mutatható meg.³⁰

Minden elemi függvénynek (és minden aritmetikai állításnak) megfeleltettünk egy, az aritmetika és logika jeleiből alkotott véges sorozatot (röviden: jelsorozatot); minden bizonyításnak pedig ilyen (pl. egymás alá irt) jelsorozatok egy véges sorozatát (röviden: jeltáblázatot). Kényelmesebb kifejezés kedvéért az elemi függvényt, állítást, illetőleg bizonyítást nem különböztetem meg a neki megfeleltetett jelsorozattól, illetőleg jeltáblázattól.

Az (1) és (2) sorozatbarendezéseket úgy végezhetjük, hogy sorozatba rendezzük az összes jelsorozatokat és jeltáblázatokot, és kiselejtezzük közülük azokat, amelyek nem egyváltozós (csak x -től függő) elemi függvények (hanem többváltozós, vagy nem

²⁹ L. az 1 jegyzetben idézett helyet. Ez a tétel is átvihető bármely, bizonyos nagyon tág feltételeknek eleget tevő axiómarendszerre; l. a 6 jegyzetben idézett mű 283—289. lapját.

A második GÖDEL-féle bebizonyíthatatlansági tétel természetesen nem zárja ki azt, hogy valamely axiómarendszer ellentmondástalanságát be lehessen bizonyítani; csak azt mondja ki, hogy a bizonyítást nem lehet teljesen elvégezni a kérdéses axiómarendszerben. Pl. az aritmetika axiómarendszere ellentmondástalanságának GENTZEN-féle bizonyítása (G. GENTZEN, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, 112 (1936), 493—565. l.; Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Neue Folge, 4 (1938), 19—44. l.) a transzfinit indukcióval való bizonyításnak egy, az aritmetika eszközeivel ugyan megfogalmazható, de aritmetikai bizonyításmódszerekkel nem pótolható speciális esetén alapul.

³⁰ A megmutatás alig különbözik attól, ahogyan GÖDEL az 1 jegyzetben idézett munkájában megmutatta, hogy az ő bizonyításában $f(x)$ szerepét átvevő függvények rekurzívok.

elemi függvények, vagy állítások, vagy teljesen értelmetlen jelkombinációk), illetőleg, amelyek nem aritmetikai bizonyítások (hanem másféle, esetleg hibás bizonyítások, vagy jelkombinációk értelmetlen egymásutánjai). Ez a kiselejtezés semmi elvi nehézséget nem okoz ugyan; mégis kényelmesebb e helyett az $f(x)$ függvény definícióját módosítani a következőképpen. Legyen

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (1')$$

az összes jelsorozatok,

$$T_1, T_2, \dots, T_n, \dots \quad (2')$$

az összes jeltáblázatok egy-egy sorozatbarendezeése. Ha $n = 0$, vagy ha T_n nem (értelmes, helyes) aritmetikai bizonyítás, akkor legyen $f(n) = 0$. Ha T_n aritmetikai bizonyítás, mégpedig annak bizonyítása, hogy valamilyen függvény sehohsem veszi fel az m értéket és az ugyanezen m indexű S_m jelsorozat éppen e függvényt az aritmetika jeleivel előállító kifejezés, akkor legyen $f(n) = m$. Ha pedig T_n aritmetikai bizonyítás, de nem ilyen tétel bizonyítása, akkor ismét legyen $f(n) = 0$. Könnyű belátni, hogy $f(n)$ e definíciójával szószerint elismételhető a fenti megfontolás, nem baj, hogy az egyváltozós elemi függvények és az aritmetikai bizonyítások közé egyéb dolgok is keveredtek.

Az (1') és (2') sorozatokba beleveszem a «hézagos» jelsorozatokot, illetőleg jeltáblázatokot is, vagyis azokat, amelyeknek egyes (az utolsót megelőző) tagjai, illetőleg sorai hiányoznak (nincsenek értelmezve). Legyen

$$J_1, J_2, \dots, J_n, \dots \quad (3)$$

az aritmetika és logika jeleinek valamely sorozatbarendezeése; nevezzük S_n -nek azt a jelsorozatot, amelynek i -edik jele $J_{\exp_i n}$ ($i = 1, 2, \dots, \text{long } n$), ill. $\exp_i n = 0$ esetén hiányzik. Hasonlóan nevezzük T_n -nek azt a jeltáblázatot, amelynek i -edik sorában az $S_{\exp_i n}$ jelsorozat áll ($i = 1, 2, \dots, \text{long } n$), ill. $\exp_i n = 0$ esetén az i -edik sora hiányzik.³¹ Akkor világos, hogy (1')-ben minden

³¹ Nem okoz zavart, hogy más indexet kap egy jeltáblázat, ha egy hiányzó sora helyébe az üres jelsorozatot (S_1 -et) tesszük; t. i. az első esetnek $\exp_1 n = 0$, a másodiknak $\exp_1 n = 1$ felel meg; ugyanis csak olyan jeltáblázatokra lesz szükségünk, amelyeknek sem hiányzó, sem üres (sem hézagos) soruk nincs.

jelsorozat előfordul (a $J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r}$ jelekből álló sorozat, ahol J_0 a hiányzó tagot pótolja, az $n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ -edik helyen). Hasonlóan látjuk, hogy (2')-ben minden jeltáblázat előfordul. Az n -et a J_n jel, az S_n jelsorozat és a T_n jeltáblázat GÖDEL-számának nevezzük.

Az $f(x)$ definíciója szerint

$$f(x) = \text{ind concl } x \cdot |1 - \text{dem } x|, \quad (4)$$

ahol $\text{concl } x$ a T_x utolsó sorának (ha T_x bizonyítás, akkor konkluziójának) GÖDEL-száma:

$$\text{concl } x = \exp_{\text{long } x} x;$$

$\text{ind } x = m$, ha S_x legvégén $\ll 1 + 1 + \dots + 1 \gg$ áll és az 1-esek száma m , előtte pedig éppen S_m áll, ha pedig S_x nem ilyen alakú, akkor $\text{ind } x = 0$; végül $\text{dem } x = 0$ vagy 1, a szerint, hogy T_x (aritmetikai) bizonyítás-e, vagy nem.

Ha idézőjellel a benne foglalt jel GÖDEL-számát jelöljük, akkor

$$\text{ind } x = \sum_{i=1}^x i \cdot |1 - \text{sgn } |x - i \cdot p_{\text{long } i+1}^{(1)} \cdot p_{\text{long } i+2}^{(1)} \cdot \prod_{j=1}^{|i-1|} p_{\text{long } i+2j+1}^{(1)} \cdot p_{\text{long } i+2j+2}^{(1)}|||;$$

ha ugyanis S_x nem $S_m \ll 1 + 1 + \dots + 1 \gg$ alakú (m egyessel), akkor az összeg minden tagjának második tényezője 0, ha pedig ilyen alakú, akkor egyedül az $i=m$ -nek megfelelő tag nem 0, hanem m . E szerint, ha megmutatjuk a $\text{dem } x$ függvény elemi voltát, (4)-ből következik, hogy $f(x)$ is elemi függvény.

T_x akkor és csak akkor bizonyítás, ha minden sorában vagy valamely aritmetikai (vagy logikai) axióma³² áll, vagy pedig előző soroknak következménye valamely, az aritmetikában megengedett következtetési szabály értelmében. Arra az esetre szorítkozom, amikor minden következtetési szabály egy vagy két tétel-

³² Ha S_n értelmes (esetleg változóktól függő) kifejezés, akkor azt az állítást, hogy S_n seholsem veszi fel az m értéket, így írjuk: $S_n \neq 1 + 1 + \dots + 1$ (m egyessel).

³³ Egyöntetűség kedvéért axiómának nevezek minden állítást, amelyet bizonyításban felhasználhatunk anélkül, hogy más állításokból következtenék; így pl. az alapműveletek definíciós egyenleteit is (l. 27 jegyzet)

ből következtet újabb tételt.³⁴ Legyen $ax\ x=0$ vagy 1 , a szerint, hogy S_x axióma-e vagy nem és $\text{cons}(x, y, z)=0$ vagy 1 , a szerint, következménye-e S_z az S_x -nek és S_y -nak (vagy pusztán S_x -nek magának) valamelyik következtetési szabály értelmében, vagy nem.³⁵ Akkor

$$\text{dem } x = \text{sgn} \sum_{k=1}^{\text{long } x} (ax \exp_k x \cdot \prod_{i=1}^{|k-1|} \prod_{j=1}^{|k-1|} \text{cons}(\exp_i x, \exp_j x, \exp_k x));$$

ugyanis az összeg értéke akkor és csak akkor 0 , ha $k=1, 2, \dots$, $\text{long } x$ -re vagy $ax \exp_k x = 0$, vagy alkalmas i, j -re ($i < k, j < k$) $\text{cons}(\exp_i x, \exp_j x, \exp_k x) = 0$; az előbbi akkor és csak akkor áll, ha $S_{\exp_k x}$, vagyis T_x k -edik sora, axióma, az utóbbi pedig akkor és csak akkor, ha T_x k -edik sora az i -edik és j -edik sornak (vagy az i -edik sornak magának) következménye valamelyik következtetési szabály értelmében. E szerint elég megmutatni, hogy $ax\ x$ és $\text{cons}(x, y, z)$ elemi függvények.

Explicit felírásukhoz természetesen pontosan meg kellene mondani, melyik axiómarendszert használjuk. Ha csak véges számú axióma van, GÖDEL-számuk rendre a_1, a_2, \dots, a_r , akkor

$$ax\ x = \text{sgn } |x - a_1| \cdot |x - a_2| \dots |x - a_r|.$$

Azonban már igen egyszerű axiómarendszer is állhat végtelen sok axiómából, úgy, hogy bizonyos alakú állítások mind axiómának számítanak.³⁶ Például ahhoz, hogy szummával értelmezett függvények értékeit kiszámíthassuk, szükségünk van (többek

közt) a $\sum_{i=0}^{a+1} f = \sum_{i=0}^a f + 1$ alakú állításokra, ahol i valamely változó, f valamely kifejezés (rendszerint olyan, amely i -t tartalmazza, de lehet i -től független is) és 1 úgy keletkezik f -ből, hogy

³⁴ Több mint két tételből újabb tételre vezető következtetési szabályok esete hasonlóan intézhető el, de vissza is vezethető a fent tárgyalt esetre.

³⁵ Ennek csak akkor van értelme, ha S_x, S_y, S_z állítások. Ha S_x, S_y nem mindketten azok, akkor mindegy, $\text{cons}(x, y, z)$ mely esetben 0 és mely esetben 1 ; ha azonban S_x, S_y állítások, de S_z nem az, akkor $\text{cons}(x, y, z) = 1$ kell legyen.

³⁶ Gyakran csak a következtetési szabályok megfogalmazásától függ, véges számú vagy végtelen sok axióma kell-e egy axiómarendszerben.

i helyébe $(a+1)$ -et helyettesítünk benne; ezeket az állításokat tekinthetjük valamennyit axiómának (l. a ²⁷ és ³³ jegyzeteket). Az S_x jelsorozat akkor és csak akkor ilyen alakú (természetesen $\Sigma(i \leq a+1)\mathfrak{f} = \Sigma(i \leq a)\mathfrak{f} + 1$ alakban írt) állítás, ha az i jel i GÖDEL-számára és a \mathfrak{f} kifejezés k GÖDEL-számára fennáll

$$\begin{aligned} x = & 2^{e\Sigma} \cdot 3^{e\mathfrak{f}} \cdot 5^i \cdot 7^{e\leq} \cdot 11^{e\alpha} \cdot 13^{e+} \cdot 17^{e1} \cdot 19^{e\mathfrak{f}} \cdot \text{transl}_8 k \cdot \\ & \cdot p_{\text{long } k+9}^{e=} \cdot p_{\text{long } k+10}^{e\Sigma} \cdot p_{\text{long } k+11}^{e\mathfrak{f}} \cdot p_{\text{long } k+12}^i \cdot p_{\text{long } k+13}^{e\leq} \cdot \\ & \cdot p_{\text{long } k+14}^{e\alpha} \cdot p_{\text{long } k+15}^{e\mathfrak{f}} \cdot \text{transl}_{\text{long } k+15} k \cdot p_{2 \text{ long } k+16}^{e+} \cdot \\ & \cdot \text{transl}_{2 \text{ long } k+16} \text{subst}(k, i, 2^{e\mathfrak{f}} \cdot 3^{e\alpha} \cdot 5^{e+} \cdot 7^{e1} \cdot 11^{e\mathfrak{f}}), \end{aligned} \quad (5)$$

ahol

$$\text{transl}_i x = \prod_{j=1}^{\text{long } x} p_{i+j}^{\exp_j x}$$

és $\text{subst}(x, y, z)$ az S_x jelsorozatból a J_y jel helyébe az S_z jelsorozat helyettesítésével keletkező jelsorozat GÖDEL-száma. Ha $\text{var } x = 0$ vagy 1 , a szerint, hogy a J_x jel (függvény független változója, vagy szumma- és produktumindex gyanánt használható) változó-e vagy nem, és $\text{term } x = 0$ vagy 1 , a szerint, kifejezés-e az S_x , akkor tehát S_x akkor és csak akkor a szóbanforgó alakú állítás, ha

$$\prod_{i=1}^x \prod_{k=1}^x (\text{var } i + \text{term } k + |x - \dots|) = 0,$$

ahol ... az (5) egyenlet jobboldala helyett áll. Hasonlóan, minden egyes ilyen «axiómacsoport» meg kell alkotni egy-egy ilyen függvényt; ezek lépnek az $|x - a_1|, |x - a_2|, \dots, |x - a_r|$ tényezők helyébe.

Ha olyan axiómacsoportok is vannak, amelyekben tetszőleges állítások szerepelnek (például a teljes indukcio axiómája, vagy a logikai axiómák), akkor ehhez még arra a prop x függvényre is szükségünk van, amely 0 vagy 1 , a szerint, állítás-e S_x vagy nem.

A (3) sorozatbarendezés alkalmas megválasztásával könnyen elérhetjük, hogy $\text{var } x$ elemi függvény legyen. Ha a változókon kívül csak véges számú jel van, akkor tegyük ezeket (3) elejére s utánuk a változókat. Ha J_r az első változó, akkor J_x akkor és csak akkor változó, ha $x \geq r$, azaz $\min(x, r) = r$, $|r - \min(x, r)| = 0$; tehát $\text{var } x = \text{sgn } |r - \min(x, r)|$. Ha pedig végtelen sok olyan

jel van, amely nem változó, akkor tegyük a változókat a páros indexű, a többi jeleket a páratlan indexű helyekre; ez esetben J_x akkor és csak akkor változó, ha x páros, $x=2 \cdot [x/2]$, tehát var $x = \text{sgn } |x - 2 \cdot [x/2]|$.

A subst (x, y, z) függvény elemi előállításához meg kell jegyeznünk, hogy amikor egy i változó helyére egy f kifejezésben (vagy állításban) egy l kifejezést helyettesítünk, nem mindenütt teszünk i helyébe l -et, hanem egyes helyeken meghagyjuk; például az olyan szummák általános tagjában, amelyek szummációs indexe éppen i (és természetesen a szummációs indexet is meghagyjuk). Az ilyen helyekről azt mondjuk, hogy azokon i kötött, a többiek pedig (ahol a helyettesítés végrehajtandó)

szabad változó. Pl. az $n + \sum_{n=1}^a (n^2 + m)$ kifejezésben n az első $+$ jel előtt szabad, a másik két helyen kötött változó. Célszerű egy változót (ha tetszik, «in contumaciam») kötöttnek nevezni egy helyen akkor is, ha nem áll ott, de ha ott állna, kötve volna; például n ilyen értelemben kötött a fenti kifejezésben ott is, ahol m áll. Már most legyen $\text{fix}(x, y, z) = 0$ vagy 1 , a szerint, hogy J_y kötött-e S_x -nek z -edik helyén, vagy nem;³⁷ tehát

$$\text{lib}(x, y, z) = \text{sgn}(|1 - \text{fix}(x, y, z)| + |\exp_z x - y|)$$

0 vagy 1 , a szerint, szabad változóként áll-e J_y az S_x -nek z -edik helyén, vagy nem (azaz vagy kötött változóként áll, vagy nem áll ott). Amikor S_x -ben J_y helyébe S_z -t helyettesítünk, S_x -nek i -edik tagja változatlanul marad, vagy S_z -vel pótolandó, a szerint, hogy $\text{lib}(x, y, i) = 1$ vagy 0 . Tehát S_x első u jeléből álló szelete

$$\text{segm}(x, y, z, u) = u + |\text{long } z - 1| \cdot \sum_{i=1}^u |1 - \text{lib}(x, y, i)|$$

hosszúságú jelsorozatba megy át. Az i -edik jel a helyettesítés után a $\text{segm}(x, y, z, |i - 1|) + 1$ -edik lesz, illetőleg ennyiedik helyen kezdődik az i -edik jel helyébe tett S_z , a szerint, hogy $\text{lib}(x, y, i) = 1$ vagy 0 . Ennélfogva

³⁷ Ha J_y nem változó, vagy S_x sem kifejezés, sem állítás, akkor mindegy, $\text{fix}(x, y, z) = 0$ -e, vagy 1 .

$$\text{subst}(x, y, z) = \prod_{i=1}^{\text{long } x} (\text{lib}(x, y, i) \cdot p_{\text{segm}(x, y, z, |i-1|)+1}^{\text{exp } i x} + \\ + |1 - \text{lib}(x, y, i)| \cdot \text{transl}_{\text{segm}(x, y, z, |i-1|)}(z));$$

tehát elemi függvény, ha $\text{lib}(x, y, z)$, ill. $\text{fix}(x, y, z)$ az.

A J_y jel az S_x jelsorozat z -edik helyén Σ -jellel kötött, ha³⁸ S_x valamely helyén, például az i -ediken, Σ áll, utána ($J_y \leq S_k$) S_l , ahol S_k és S_l kifejezések, végül vagy $z = i + 2$, vagy pedig $i + 5 + \text{long } k \leq z \leq i + 4 + \text{long } k + \text{long } l$. Ez pedig akkor és csak akkor áll, ha a

$$\prod_{i=1}^{\text{long } x} \prod_{k=1}^x \prod_{l=1}^x \left(\text{term } k + \text{term } l + |x - \prod_{j=1}^{|i-1|} p_j^{\text{exp } j x} \cdot p_i^{\text{e } \Sigma} \cdot p_{i+1}^{\text{e } (y)} \cdot p_{i+2}^y \cdot p_{i+3}^{\text{e } \leq y} \cdot \right. \\ \left. \cdot \text{transl}_{i+3} k \cdot p_{i+4+\text{long } k}^{\text{e } (y)} \cdot \text{transl}_{i+4+\text{long } k} l \cdot \prod_{j=i+5+\text{long } k+\text{long } l}^{\text{long } x} p_j^{\text{exp } j x} \right| + \\ + |z - (i + 2)| \cdot (|\max(z, i + 5 + \text{long } k) - z| + \\ + |\min(z, i + 4 + \text{long } k + \text{long } l) - z|) = 0.$$

Hasonló kifejezés készíthető a többi, Σ -hoz hasonlóan «kötő» jelekhez;³⁹ $\text{fix}(x, y, z)$ ezek szorzatának sgn -függvénye, tehát elemi függvény.

Ily módon elegendő $\text{term } x$ és $\text{prop } x$ elemi voltát megmutatni ahhoz, hogy ax elemi függvény legyen.⁴⁰ Hasonló megfontolással lehet megmutatni, hogy $\text{cons}(x, y, z)$ is elemi függvény, ha $\text{term } x$ és $\text{prop } x$ azok. Ez úgy történik, hogy minden egyes következtetési szabályhoz szerkesztünk $\text{term } x$,

³⁸ Egyszerűség kedvéért felteszem, hogy csak 0 alsó határú szummák szerepelnek; a többiek kifejezhetők ezekkel, l. 27 jegyzet.

³⁹ Ha végtelen sok kötő jel van, akkor $p_i^{\text{e } \Sigma}$ helyébe írjunk a legutóbbi formulában p_i^j -t, az egész formula elé $\prod_{j=1}^x$ -et és $\text{term } l$ után $+$ -jellel még j egy olyan függvényét, amely 0 vagy 1 aszerint, kötő jel-e S_j , vagy nem. Ez utóbbi függvény elemi voltát a (3) sorozatbarendezés alkalmas megválasztásával hasonló módon biztosíthatjuk, mint ahogy a $\text{var } x$ függvényét biztosítottuk.

⁴⁰ Komplikáltabb axiómarendszerben előfordulhat, hogy többféle változó van (pl. természetes számokon, valós számokon, függvényeken, halmazokon átfutó változó); ez esetben $\text{var } x$, $\text{subst}(x, y, z)$ és esetleg $\text{term } x$, $\text{prop } x$ helyébe több, hasonló jellegű függvény kerül; elvileg új gondolatot azonban ez az eset sem igényel.

prop x (és a már eleminek bizonyult var x , subst(x, y, z), fix(x, y, z), lib(x, y, z)) segítségével olyan függvényt, amely akkor és csak akkor 0, ha S_z a kérdéses következtetési szabály értelmében következménye S_x -nek és S_y -nak (l. a ³⁵ jegyzetet); cons(x, y, z) ezek szorzatának sgn-függvénye. A kivített a helyettesítési szabály esetén illusztrálom; e szabály értelmében S_z következménye S_x -nek, ha belőle egy i változó helyére egy f kifejezésnek helyettesítésével keletkezik, feltéve, hogy f nem tartalmaz olyan szabad változót, amely S_x egy olyan helyén, ahol i szabadon áll (tehát ahol f -t kell helyébe helyettesíteni), «in contumaciam» kötve van.⁴¹ Ez akkor és csak akkor áll, ha

$$\prod_{i=1}^x \prod_{k=1}^z (\text{var } i + \text{term } k + \sum_{u=1}^{\text{long } x} \sum_{v=1}^{\text{long } k} (|1 - \text{lib}(x, i, u)| \cdot |1 - \text{var exp}_v k| \cdot \text{fix}(k, \text{exp}_v k, v) \cdot |1 - \text{fix}(x, \text{exp}_v k, u)|) + |z - \text{subst}(x, i, k)|) = 0.$$

Tehát már csak term x és prop x elemi voltának megmutatása van hátra. Az S_x jelsorozat akkor és csak akkor kifejezés, ha van olyan jeltáblázat (S_x «keletkezési táblázata»), amelynek minden sorában vagy egy jelből álló kifejezés áll (például változó, vagy 1), vagy pedig a kérdéses sor a táblázat előző soraiból valamely kifejezésképző jel (pl. + - jel) alkalmazásával keletkezett; utolsó sorában pedig S_x áll. Legyen tab $x = 0$ vagy 1, a szerint, hogy T_x ilyen keletkezési táblázat-e vagy nem. S_x (legegyszerűbb) keletkezési táblázatának legfeljebb long x sora van (mert minden sor S_x egy-egy jelét «vezeti be») és mindegyik sorának GÖDEL-száma legfeljebb x (mert mindegyik sor S_x -nek «részkifejezése»). E szerint S_x (legegyszerűbb) keletkezési táblázatának GÖDEL-száma legfeljebb

$$\text{constr } x = \prod_{i=1}^{\text{long } x} p_i^x.$$

⁴¹ Ha ezt a feltételt nem tennők, pl. a számtani sor

$$\sum_{n=1}^m (a + |n - 1| \cdot d) = [(2a + |m - 1| \cdot d) \cdot m / 2]$$

összegképletéből d helyébe n -et helyettesítve a hamis

$$\sum_{n=1}^m (a + |n - 1| \cdot n) = [(2a + |m - 1| \cdot n) \cdot m / 2]$$

képletet kaphatnók.

Ennélfogva

$$\text{term } x = \text{sgn} \prod_{i=1}^{\text{constr } x} (\text{tab } i + |x - \text{concl } i|).$$

A $\text{tab } x$ függvény teljesen hasonlóan keletkezik, mint $\text{dem } x$; csak az x szerepét az a $\text{mon } x$ függvény veszi át, amely a szerint 0 vagy 1, hogy S_x egy jelből álló kifejezés-e, a $\text{cons}(x, y, z)$ függvény szerepét pedig az a $\text{comp}(x, y, z)$ függvény, amely a szerint 0 vagy 1, hogy S_x az S_x -ből és S_y -ből valamely kifejezésképző jel segítségével jött-e létre vagy nem. Világos, hogy

$$\text{mon } x = \text{sgn}(|\text{long } x - 1| + \text{var } \exp_1 x \cdot \text{const } \exp_1 x),$$

ahol $\text{const } x = 0$ vagy 1, a szerint, hogy J_x konstans, azaz olyan, a változóktól különböző jel-e, amely magában kifejezésnek számít, vagy nem. E $\text{const } x$ függvény elemi voltát a (3) sorozatba rendezés alkalmas megválasztásával hasonló módon biztosíthatjuk, mint ahogy a $\text{var } x$ függvényét biztosítottuk. A $\text{comp}(x, y, z)$ függvény pedig (véges számú kifejezésképző jel esetében⁴²) úgy állítható elő, hogy minden egyes kifejezésképző jelhez előállítunk egy olyan függvényt, amely akkor és csak akkor 0, ha S_x az S_x -ből és S_y -ből a kérdéses kifejezésképző jel segítségével keletkezik (pl. a $+$ -jelhez tartozó ilyen függvény⁴³ $|z - 2^{e^{(1)}} \cdot \text{transl}_1 x \cdot p_{\text{long } x+2}^{e^{(+)}} \cdot \text{transl}_{\text{long } x+2} y \cdot p_{\text{long } x+\text{long } y+3}^{e^{(+)}}|$) s e függvények szorzatának sgn -függvényét képezzük. E szerint $\text{term } x$ elemi függvény; $\text{prop } x$ elemi volta hasonlóan mutatható meg, csak most az x szerepét az a függvény veszi át, amely a szerint 0 vagy 1, hogy S_x kifejezésekből valamely formulaképző jel (pl. $=$ -jel) alkalmazásával keletkezik-e vagy nem. E szerint az $f(x)$ függvény elemi függvénynek bizonyult.

7. Még pár szót szeretnék szólni a GÖDEL-tétel jelentőségéről. A matematikai kutatásnak két motivuma lehet. Az egyiket HILBERT⁴⁴ így fogalmazta meg a párisi matematikai kongresszu-

⁴² Végtelen sok kifejezésképző jel esete hasonló módosítást igényel, mint végtelen sok kötő jel esete a $\text{fix}(x, y, z)$ függvénynél (³⁹ jegyzet).

⁴³ A kifejezések egyértelmű felépítését legegyszerűbben úgy biztosíthatjuk, hogy az összetett kifejezéseket mindig zárójelbe tesszük; a zárőjelek elhagyására vonatkozó megállapodásokat külön következtetési szabályokként fogalmazhatjuk.

⁴⁴ D. HILBERT, Sur les problèmes futurs des mathématiques, *Compte*

son: «Itt a probléma, keresd a megoldását!» A másikat talán így lehetne megfogalmazni: «Van egy módszerem, mit kezdjek vele?» Kétségtelen, hogy a matematikát mindig a problémák vitték igazán előre; az olyan matematikus, aki mindig csak azt keresi, mi jön ki adott módszerekkel, elvben pótolható elég komplikált szerkezetű géppel. A probléma megoldását kutató matematikust az a meggyőződés szokta vezetni, hogy problémáját meg is lehet oldani; HILBERT fenti mondatát így folytatta: «Megtalálhatod tiszta gondolkodás segítségével. Valóban, matematikus sohasem kénytelen azt mondani: Ignorabimus.» Mármost GÖDEL eredménye azt mutatja, hogy a matematikusnak ez az általánosan elterjedt meggyőződése alaptalan. GÖDEL gondolatmenete nagyon hasonlít ahhoz, amivel CANTOR a transzcendens számok létezését megmutatta. Ez a hasonlóság arra a sejtésre vezethet bennünket, hogy az eldönthetetlen problémák nem kivételes jelenség, hanem bizonyos értelemben ezek vannak többségben; az a véletlen, ha egy probléma megoldható.⁴⁵ Mindenesetre sokkal «sűrűbben» vannak az eldönthetetlen «GÖDEL-féle problémák», mint ahogyan egy olyan példából gondolná az ember, mint amilyent ebben a dolgozatban adtam. Így meglehet, hogy például a GOLDBACH-problémát azért nem sikerült eddig megoldani, mert átfogalmazható egy olyan axiómarendszer GÖDEL-féle problémájává, amely mindazokat az eszközöket tartalmazza, amiket eddig megoldására felsorakoztattak. És itt a GOLDBACH-probléma helyett bármely máig meg nem oldott problémát említhettem volna;⁴⁶ kiki gondolhat arra a problémára, amely

rendu du deuxième Congrès international des Mathématiques, Paris, 1900, 58—114, különösen 69. l.; *Mathematische Probleme*, *Archiv für Mathematik und Physik*, (3), 1 (1901), 44—63, 213—238, különösen 52. l.; *Gesammelte Abhandlungen*, III (Berlin, 1935), 290—329, különösen 298. l.

⁴⁵ E sejtés gondolatát egy túlnyomórészt nem-matematikusból álló, de a matematika iránt is érdeklődő társaság (Exodus) vetette fel 1942 nyarán matematikai kérdésekről (az integrálszámításról) való beszélgetésünk kapcsán.

⁴⁶ Nem volna nehéz a fenti gondolatmenettel elemi probléma helyett olyan alakú, az analízis eszközeivel eldönthetetlen problémát konstruálni, hogy van-e egy (pl. hatványsorának együtthatóival) adott analitikus függvénynek zérushelye egy adott tartományban.

éppen foglalkoztatja. Nem kibúvó az sem, hogy amikor egy probléma megoldását keressük, nem gondolunk határozott axiómarendszerre; a módszerek, amelyeket alkalmazunk, mégis csak megfogalmazhatók valamilyen axiómarendszerben;⁴⁷ s e mellett olyan probléma is van, amely abszolút értelemben megoldhatatlan, függetlenül attól, hogy milyen axiómarendszerben dolgozunk, s hogy egyáltalában axiómatikusan gondolkodunk-e.⁴⁸ Olyan tények és lehetőségek ezek, amelyekkel minden matematikusnak szembe kell néznie, hogy ne csak abban különbözzék a körnégyszögesítőtől, hogy mélyebb segédeszközökkel dolgozik. Öröndetes dolog, hogy ezt mind többen és többen belátják, s ma már nemcsak az öregebb matematikusok privilégiuma a matematika alapjainak kutatása, hanem a fiatalabbakat is érdekli ez a tárgykör.⁴⁹ A megoldhatatlan problémákkal kapcsolatos kérdések tisztázása csak hasznára válhat a matematikának, éppúgy, mint a RUFFINI—ABEL-tétel s a GALOIS-féle egyenlet-elmélet hasznára vált az algebrának.

Kalmár László.

⁴⁷ Azok, akik az általános ötödfokú egyenlet megoldásának képletét keresték, sem gondoltak arra, hogy algebrai megoldást keresnek abban az értelemben, ahogyan ezt a fogalmat ABEL pontosan megfogalmazta. A körnégyszögesítők sem gondolnak arra, hogy minden lépésük az öt EUKLIDES-féle elemi szerkesztés egyike. Ez a tény semmivel sem gyengíti a RUFFINI—ABEL-tétel, ill. a kör négyszögesítésének lehetetlenségét kimondó LINDEMANN-tétel érvényét.

⁴⁸ L. pl. A. CHURCH, An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, 58 (1936), 345—363. l. E kérdést (s a GÖDEL-tételekkel kapcsolatos kérdéseket is) jól megvilágítja a következő dolgozat: PÉTER RÓZSA, Az axiomatikus módszer korlátai, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 48 (1941), 120—143. l.

PÉTER RÓZSA egy még közé nem tett gondolatának felhasználásával ilyen abszolút értelemben megoldhatatlan aritmetikai problémát is sikerült szerkesztenem a jelen dolgozat módszerével; ily módon CHURCH bizonyítását is egyszerűsítettem. Erre másik dolgozatban szándékozom visszatérni.

⁴⁹ Kétségtelen azonban, hogy a matematika alapjai igazán csak azt tudják érdekelní, aki a matematika egyéb ágait is ismeri.

EIN EINFACHES BEISPIEL FÜR EIN UNENTSCHEIDBARES ARITHMETISCHES PROBLEM.

Man nenne eine zahlentheoretische Funktion *elementar*, falls sie aus ihren Variablen und aus 1 durch endlich viele Additionen, arithmetische Subtraktionen, Multiplikationen, arithmetische Divisionen, Summen- und Produktenbildungen entsteht, wobei unter arithmetische Subtraktion die Bildung des absoluten Betrages der Differenz, unter arithmetische Division die Bildung des ganzen Teiles des Quotienten verstanden wird. Mit Hilfe der Gödelschen Nummerzuordnung zeigt man leicht, dass man die elementaren Funktionen einerseits, die Beweise in einem (hinreichend ausdrucksfähigen und hinreichend scharf abgegrenzten) Axiomensystem der Arithmetik andererseits so numerieren kann, dass die folgende zahlentheoretische Funktion $f(x)$ elementar ist. Wird durch Beweis Nr. n gezeigt, dass die elementare Funktion Nr. m nie den Wert m annimmt, so sei $f(n)=m$; sonst (und auch für $n=0$, die keinem Beweis und keiner elementaren Funktion zugeordnet wurde) sei $f(n)=0$. Ist $f(x)$ die elementare Funktion Nr. g , so kann man weder beweisen, dass $f(x)$ nie gleich g ist, noch eine natürliche Zahl q numerisch angeben, für die $f(q)=g$ beweisbar ist, es sei denn, dass das Axiomensystem widerspruchsvoll ist. In der Tat, wird durch Beweis Nr. m gezeigt, dass $f(x)$ nie gleich g ist, so ist nach Definition von $f(x)$ die numerische Gleichung $f(m)=g$ richtig, also auch beweisbar: Widerspruch. Ist aber für ein numerisches q die Gleichung $f(q)=g$ beweisbar und wird durch Beweis Nr. q nicht gezeigt, dass $f(x)$ nie gleich g ist (sonst schliesst man, wie im ersten Fall), so ist nach Definition von $f(x)$ die numerische Ungleichung $f(q) \neq g$ richtig, also beweisbar: abermals Widerspruch.

Hieraus gewinnt man unmittelbar die beiden Gödelschen Unableitbarkeitssätze.

László Kalmár.

A FELÜLETI GÖRBÉK EGY FAJTÁJÁRÓL. HENGERRÉ ÍRT LÁNCGÖRBÉK.

1. *Célkitűzés.* Jelölje ϑ azt a szöget, amelyet a felületi görbe egy pontjában a görbe főnormálisa a felületi normálissal bezár. Ez a szög általában a görbe más-más pontjára más és más. Vizsgálni akarjuk azokat a felületi görbéket, amelyeknek minden pontjában ϑ ugyanakkora. Ezeket *állandó hajlású görbéknek* fogjuk nevezni.

Ilyen görbék például: a gömb körei, a forgásfelület parallel- és meridiángörbéi. Általánosabban: egy felület geodetikussal és aszimptotikus vonalai, mert ezekre $\vartheta = 0$, ill. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

2. *Differenciálegyenlet.* Az állandó hajlású görbék differenciálegyenletét a

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\varrho_n}{\varrho_g} = k$$

összefüggés alapján fogjuk meghatározni. Itt a GAUSS-féle alapelemlényekkel kifejezve

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\sin \vartheta}{\varrho} = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{W ds^3} \left[W^2 (du d^2 v - dv d^2 u) - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} E_u du^2 + E_v du dv + (F_v - \frac{1}{2} G_u) dv^2 & Edu + F dv \\ (F_u - \frac{1}{2} E_v) du^2 + G_u du dv + \frac{1}{2} G_v dv^2 & F du + G dv \end{vmatrix} \right]$$

a geodetikussal és

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{\cos \vartheta}{\varrho} = \frac{L du^2 + M du dv + N dv^2}{ds^2}$$

a normális görbület. Ezeket (1)-be helyettesítjük, alkalmazzuk az elsőfajú CHRISTOFFEL-féle szimbólumokat¹ és feltesszük, hogy u a független változó, azaz $d^2u = 0$. Így a következő differenciálegyenletet nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{du^2} = & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{du} \right)^3 - \left(\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \\ & + \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) \frac{dv}{du} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \\ & + \frac{k}{W} \sqrt{E + 2F \frac{dv}{du} + G \left(\frac{dv}{du} \right)^2} \left[L + 2M \frac{dv}{du} + N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

A geodetikus vonalak «hajlása» minimális ($k=0$), egyenletük:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{du^2} = & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{du} \right)^3 - \left(\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \\ & + \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) \frac{dv}{du} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}; \end{aligned}$$

az aszimptotikus vonalaké pedig maximális ($k = \infty$), egyenletük:

$$L + 2M \frac{dv}{du} + N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = 0.$$

A ϑ állandóságából egyszerűen következik, hogy az állandó-hajlású görbék torziója megegyezik az abban a pontban érintő geodetikus vonal torziójával.

3. *Forgásfelület esetében* a (2) egyenlet a $v'' = \Phi(u, v, v')$ alak helyett egyszerűbb alakot ölt. Ha u a meridiángörbe ívhossza és v az elforgatás szöge, akkor a felület egyenlete

$$x = p(u) \cos v, \quad y = p(u) \sin v, \quad z = q(u)$$

és $p'(u)^2 + q'(u)^2 = 1$. Ebben az esetben az E, F, G és L, M, N alaplmenyiségek csak u -tól függenek s ezért a (2) egyenlet $v'' = \Phi(u, v')$ alakú vagy $w = v'$ jelöléssel

$$w' = \Phi(u, w).$$

¹ Lásd például BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie I. (2. kiadás, 1924) 79. l., (136).

Minthogy $F = 0$, $M = 0$ miatt $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$, $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$, $\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$, $\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$, az állandó hajlású görbék egyenlete

$$\frac{dw}{du} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} w^3 - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} w + \frac{k}{W} \sqrt{E + Gw^2} (L + Nw^2). \quad (3)$$

4. *Hengerfelület esetében* $p(u) = R$, $q(u) = u$, tehát $E = 1$, $G = R^2$, $W = R$, $L = 0$, $N = -R$ és a (3)-ban még szereplő szimbólumok is eltűnnek. Így az állandó hajlású görbék egyenlete

$$\frac{dw}{du} = -kw^2 \sqrt{1 + R^2 w^2}.$$

Ennek megoldása a $k = 0$ esetben $w = c$, ami a henger alkotóit és csavarvonalait szolgáltatja. Ha $k \neq 0$, akkor egyszeri integrálással

$$w = \frac{1}{\sqrt{k^2(u + \alpha)^2 - R^2}} \quad (4)$$

s ebből újbóli integrálással

$$u + \alpha = \frac{R}{2k} \left(\frac{1}{\beta} e^{kv} + \beta e^{-kv} \right),$$

ahol α és β integrációs állandók. Az így nyert állandó hajlású görbék mindannyian kongruensek: például az $\alpha = 0$, $\beta = 1$ választás a következő görbét szolgáltatja:

$$x = R \cos v, \quad y = R \sin v, \quad z = \frac{R}{2k} (e^{kv} + e^{-kv}).$$

Látjuk tehát, hogy a hengerfelületet síkba lefejtve az állandó hajlású görbék a sík egyeneseit és az alkotóiránnyal párhuzamos szimmetriatengelyű láncgörbéit szolgáltatják.

5. *A hengerre írt láncgörbék mechanikai származtatása.* Egy függőleges tengelyű, síma felületű körhengerre tekert homogén tömegoszlású, hajlékony és nem nyújtható fonál egyensúlyi helyzetét keressük.

Tudvalevőleg az ilyen feladatot általános felület esetében is vissza lehet vezetni a felületen mozgó anyagi pont mozgásának

vizsgálatára.² Ezt azáltal lehet elérni, hogy a pont mozgásegyenleteiben az mv mozgásmennyiséget a T feszültséggel, a dt időt pedig a $-ds$ ívelemmel helyettesítjük. Az energiátétel alapján tehát

$$dT = -(Xdx + Ydy + Zdz)$$

és ebből integrálással a mi esetünkben

$$T = gz + h, \quad (5)$$

ahol g az egységnyi hosszúságú fonaldarab súlya, h pedig integrációs állandó. Második egyenletet ad az impulzusnyomaték tétele. A hatóerőknek a henger tengelyére vonatkoztatott nyomatéka zérus, mert a súly párhuzamos a tengellyel, a reakcióerő pedig metszi a tengelyt. Ezért a henger tengelyére vonatkoztatott impulzusnyomaték állandó és így

$$x \left(T \frac{dy}{ds} \right) - y \left(T \frac{dx}{ds} \right) = C,$$

vagy a henger $x = R \cos v$, $y = R \sin v$, $z = u$ egyenletrendszerének felhasználása után polárkoordinátákban

$$TR^2 \frac{dv}{ds} = C. \quad (6)$$

Ha az (5) és (6) egyenletekből T -t kiküszöböljük, a keresett egyensúlyi helyzet következő differenciálegyenletéhez jutunk:

$$(gu + h)R^2 dv = C(R^2 dv^2 + du^2)^{\frac{1}{2}},$$

vagyis

$$\frac{dv}{du} = \frac{C}{R} \frac{1}{\sqrt{R^2(gu + h)^2 - C^2}}.$$

Minthogy ez az egyenlet az állandók jelölésétől eltekintve (4)-el azonos, megoldásai ebben az esetben is hengerre írt láncgörbék. Eredményünk szerint a függőleges tengelyű hengerre tekert fonál egyensúlyi helyzetei állandó hajlású görbék és pedig a hengerre írt láncgörbék.

Bl. Dolapcsiev.
(ford. Hajós György).

² Lásd például APPELL, P.: *Mécanique rationnelle* I. (1902) 196—197. l.

EINE ART VON FLÄCHENKURVEN. ZYLINDERKETTENLINIEN.

Es werden diejenige Flächenkurven untersucht, welche die Eigenschaft besitzen, dass in jedem Punkt der Kurve die Hauptnormale mit der Flächennormale einen konstanten Winkel ϑ einschliesst. Beispiele solcher Flächenkurven «gleicher Neigung» sind: die Kreise auf der Kugel, die Parallel- und Meridiankurven der Rotationsflächen, die geodetischen Linien ($\vartheta=0$), die Asymptotenlinien ($\vartheta=\frac{\pi}{2}$). Die Differentialgleichung (2) der Flächenkurven gleicher Neigung wird aus der Beziehung $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\rho_n}{\rho_g}$ abgeleitet, wobei $\frac{1}{\rho_g}$ die geodetische und $\frac{1}{\rho_n}$ die Normalkrümmung der Flächenkurve ist. Bei Rotationsflächen nimmt die Differentialgleichung die einfachere Form (3) an. Sie wird für Rotationszylinder gelöst und es wird gezeigt, dass bei der Abwicklung des Zylinders in die Ebene die Kurven gleicher Neigung in Geraden und Kettenlinien übergehen.

Sucht man andererseits die Gleichgewichtslage eines schweren, homogenen, unausdehnbaren und biegsamen Fadens, welcher auf einen vollkommen glatten Kreiszylinder mit vertikaler Rotationsachse aufgewickelt ist, so findet man eben die Zylinderkurven gleicher Neigung, d. h. die Gleichgewichtskurven sind Zylinderkettenlinien.

Bl. Dolaptschiew.

EGY HATVÁNYSOR KONVERGENCIÁJA.

Vizsgálni fogjuk az

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(1-x)^{\rho}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1)$$

hatványsort. Ennek konvergenciaköre az egységkör, a kerületén $x = 1$ az egyetlen szinguláris hely. PRINGSHEIM¹ bebizonyította, hogy a $\rho = 0$ esetben a sor az $x = 1$ helyen is konvergens. FEJÉR² tetszésszerűen valós ρ esetében megoldotta a konvergencia problémáját. Cikkében az együtthatók egy aszimptotikus képletét állapította meg, amellyel könnyen bizonyítható, hogy a sor az $x = 1$ helyen $\rho < \frac{1}{2}$ esetében konvergens, $\rho \geq \frac{1}{2}$ esetében pedig divergens.

Értekezésünk célja, hogy a

$$0 \leq \rho < \frac{1}{2}$$

esetben a konvergenciának közvetlen bizonyítását adjuk. Bizonyításunk hasonlít DU BOIS REYMOND³ eljárásához, amellyel a FOURIER-féle sorok összegezhetségét vizsgálja, azonban a második középértéktétel alkalmazása révén annál egyszerűbbnek mondható.

Alapul vesszük az (1) sor együtthatóinak FEJÉR⁴ által adott következő képletét:

¹ PRINGSHEIM, A.: Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Sitzungsber. math.-phys. Kl. bayer. Akad. **30**, 37—100 (1900).

² FEJÉR L.: Aszimptotikus értékek meghatározásáról. Mat. Természett. Ért. **27**, 1—33 (1909).

³ DU BOIS-REYMOND, P.: Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln. Abh. bayer. Akad. **12**, 2. Abt. (1876).

⁴ FEJÉR idézett cikkének 19. lapján.

$$a_0 = \frac{1}{2^e \pi \sqrt{e}} \int_0^\pi \varphi(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{2^e \pi \sqrt{e}} \int_0^\pi \varphi(t) \cos nt dt, \quad (n=1, 2, \dots)$$

ahol

$$\varphi(t) = \frac{\cos \left[\varrho \frac{\pi-t}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right]}{\left(\sin \frac{t}{2} \right)^e}.$$

Az itt szereplő általánosított RIEMANN-féle integrálok ϱ -ra vonatkozó, s a következőkben is állandóan figyelembe vett megszorításunk miatt nyilvánvalóan konvergensek. E formulák alapján

$$s_n = \sum_{n=0}^n a_n = \frac{1}{2^e \pi \sqrt{e}} \int_0^\pi \varphi(t) \frac{\sin (2n+1) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = \frac{I}{2^e \pi \sqrt{e}},$$

ahol

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^{-1-\varrho} \frac{t}{2} [\sin \gamma(t) - \sin \chi(t)] dt, \quad (2)$$

$$\gamma(t) = \varrho \frac{\pi-t}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + (2n+1) \frac{t}{2},$$

$$\chi(t) = \varrho \frac{\pi-t}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - (2n+1) \frac{t}{2}.$$

Vizsgáljuk most az

$$I_1 = \int_{t_0}^\pi \sin^{-1-\varrho} \frac{t}{2} \sin \gamma(t) dt, \quad I_2 = \int_{t_0}^\pi \sin^{-1-\varrho} \frac{t}{2} \sin \chi(t) dt \quad (3)$$

integrálokat, ahol egyelőre $t_0 > 0$.

Minthogy

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} + \frac{1}{2}(2n+1-\varrho) > 0,$$

$\gamma(t)$ monoton az egész $(0, \pi)$ intervallumban. Az $\eta = \gamma(t)$ változóra térve át

$$I_1 = \int_{\eta(t_0)}^{\eta(\pi)} \phi_1(t) \sin \eta d\eta, \quad (4)$$

ahol

$$\phi_1(t) = \sin^{-1-\varrho} \frac{t}{2} \cdot \frac{dt}{d\eta} = \frac{\sin^{1-\varrho} \frac{t}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(2n+1-\varrho) \sin^2 \frac{t}{2}},$$

$$\frac{d[\phi_1(t)]^{-1}}{dt} = \sin^{\varrho} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \left[\frac{\varrho+1}{4} (2n+1-\varrho) + \frac{\varrho-1}{8} \sin^{-2} \frac{t}{2} \right].$$

Ha tehát

$$\frac{1}{2} \sin^{-2} \frac{t_1^*}{2} = \frac{1+\varrho}{1-\varrho} (2n+1-\varrho), \quad (5)$$

akkor $[\phi_1(t)]^{-1}$ és vele együtt $\phi_1(t) > 0$ miatt $\phi_1(t)$ is monoton a (t_0, t_1^*) és a (t_1^*, π) intervallumban.

Hasonlóan

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} (2n+1+\varrho)$$

s így, ha

$$\frac{1}{2} \sin^{-2} \frac{t_2^*}{2} = 2n+1+\varrho, \quad (6)$$

akkor $\chi(t)$ monoton a $(0, t_2^*)$ és a (t_2^*, π) intervallumban. Legyen

$$\phi_2(t) = \sin^{-1-\varrho} \frac{t}{2} \cdot \frac{dt}{d\chi} = \frac{\sin^{1-\varrho} \frac{t}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} (2n+1+\varrho) \sin^2 \frac{t}{2}},$$

úgyhogy (3)-ban a $\chi = \chi(t)$ változóra térve át

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \int_{\chi(t_0)}^{\chi(t_2^*-\varepsilon)} \phi_2(t) \sin \chi d\chi + \int_{t_2^*-\varepsilon}^{t_2^*+\varepsilon} \sin^{-1-\varrho} \frac{t}{2} \sin \chi(t) dt + \\ &+ \int_{\chi(t_2^*+\varepsilon)}^{\chi(\pi)} \phi_2(t) \sin \chi d\chi = I_0 + I_\varepsilon + I_\pi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ahol $0 < t_0 < t_2^* - \varepsilon < t_2^* < t_2^* + \varepsilon < \pi$. Minthogy

$$\begin{aligned} \frac{d[\phi_2(t)]^{-1}}{dt} &= \\ &= \sin^{\varrho} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \left[\frac{\varrho-1}{8} \sin^{-2} \frac{t}{2} - \frac{\varrho+1}{4} (2n+1+\varrho) \right] < 0, \end{aligned}$$

$[\phi_2(t)]^{-1}$ monoton a $(0, \pi)$ intervallumban. Azonban $[\phi_2(t_2^*)]^{-1} = 0$, tehát $\phi_2(t)$ monoton a $(0, t_2^*)$ és a (t_2^*, π) intervallumban.

Ha t_1', t_1'', t_2', t_2'' a második közéértéktételnek megfelelő helyek, amelyekre tehát $t_0 < t_1' < t_1^* < t_1'' < \pi$, $t_0 < t_2' < t_2^* - \varepsilon < t_2^* < t_2^* + \varepsilon < t_2'' < \pi$, akkor a második közéértéktétel szerint (4)-ben

$$I_1 = \left. \begin{aligned} & \phi_1(t_0) \int_{\eta(t_0)}^{\eta(t_1')} \sin \eta d\eta + \phi_1(t_1^*) \int_{\eta(t_1')}^{\eta(t_1'')} \sin \eta d\eta + \\ & + \phi_1(t_1'') \int_{\eta(t_1'')}^{\eta(t_1'')} \sin \eta d\eta + \phi_1(\pi) \int_{\eta(t_1'')}^{\eta(\pi)} \sin \eta d\eta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

és (7)-ben

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \phi_2(t_0) \int_{\chi(t_0)}^{\chi(t_2')} \sin \chi d\chi + \phi_2(t_2^* - \varepsilon) \int_{\chi(t_2')}^{\chi(t_2^* - \varepsilon)} \sin \chi d\chi, \\ I_\pi &= \phi_2(t_2^* + \varepsilon) \int_{\chi(t_2^* + \varepsilon)}^{\chi(t_2'')} \sin \chi d\chi + \phi_2(\pi) \int_{\chi(t_2'')}^{\chi(\pi)} \sin \chi d\chi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ezek alapján $\phi_1(0) = 0$ és $\phi_2(0) = 0$ miatt a (3) alatti I_1 és I_2 integrálok a $t_0 = 0$ esetében is konvergensek. Tehát (2) alapján

$$I = \frac{1}{2}(I_1 - I_2), \quad \text{ha } t_0 = 0. \quad (10)$$

A következőkben a LANDAU-féle szimbólumok mintájára

$$f(n) = \omega(n^\alpha)$$

azt jelenti, hogy $\left| \frac{f(n)}{n^\alpha} \right|$ két pozitív szám között marad, vagyis, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{n^\alpha} \right| > 0 \quad \text{és} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{n^\alpha} \right| < \infty.$$

E szimbólum használatának az az előnye, hogy erre a LANDAU-féle szimbólumokkal ellentétben az $\omega(n^\alpha)/\omega(n^\beta) = \omega(n^{\alpha-\beta})$ szabály is fennáll.⁵

(5) szerint $t_1^* = \omega(n^{-\frac{1}{2}})$, tehát

$$\phi_1(t_1^*) = \omega\left(n^{\frac{p-1}{2}}\right)$$

s így $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1(t_1^*) = 0$. Mivel másrészt $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1(\pi) = 0$, (8) alapján (10.-ben $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0$).

⁵ A bevezetett szimbólum szabatos értelmezése HAJÓS GYÖRGY-től való.

(6) szerint $t_2^* = \omega(n^{-\frac{1}{2}})$ és

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(2n+1+\varrho) \sin^2 \frac{t_2^* \pm \varepsilon}{2} = \\ = \frac{1}{2}(2n+1+\varrho) \left(\sin^2 \frac{t_2^*}{2} - \sin^2 \frac{t_2^* \pm \varepsilon}{2} \right) = \\ = \frac{1}{2}(2n+1+\varrho) \sin \left(t_2^* \pm \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \left(\mp \frac{\varepsilon}{2} \right). \end{aligned}$$

Ha tehát $\varepsilon = \omega(n^{-\frac{1}{2}})$, akkor

$$\phi_2(t_2^* \pm \varepsilon) = \frac{\omega(n^{\frac{\varrho-1}{2}})}{\frac{1}{2}(2n+1+\varrho) \omega(n^{-\frac{1}{2}}) \omega(n^{-\frac{1}{2}})} = \omega(n^{\frac{r}{2} - \frac{1}{4}}),$$

másrészt (7) alapján

$$|I_\varepsilon| < \int_{t_2^* - \varepsilon}^{t_2^* + \varepsilon} \sin^{-1-\varrho} \frac{t}{2} dt = \omega(n^{-\frac{1}{2}}) \omega(n^{\frac{\varrho+1}{2}}) = \omega(n^{\frac{\varrho}{2} - \frac{1}{4}}).$$

Ezek szerint $\varepsilon = \omega(n^{-\frac{1}{2}})$ választással $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_2(t_2^* \pm \varepsilon) = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} I_\varepsilon = 0$. Mivel továbbá $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_2(\pi) = 0$, azért (10)-ben (7) és (9) alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0$.

Eredményeink szerint (2)-ben $\lim_{n \rightarrow \infty} I = 0$ és így $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Ezzel kimutattuk, hogy az (1) sor a $0 \leq \varrho < \frac{1}{2}$ esetben az $x = 1$ helyen konvergens és összege zérus.

Ferenczi Zoltán.

ÜBER DIE KONVERGENZ EINER POTENZREIHE.

In dieser Abhandlung ist ein Teil eines FEJÉRSCHEN Ergebnisses, dass nämlich die Potenzreihe

$$f(x) = \frac{1}{e^{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $0 \leq \varrho < \frac{1}{2}$ im Punkte $x=1$ konvergiert, direkt aus der DIRICHLET-SCHEN Formel mit einer DU BOIS-REYMONDSCHEN Methode bewiesen.

Z. Ferenczi.

AZ ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ RIEMANN-FÉLE TEREK EGYIK JELLEMZÉSI MÓDJÁRÓL.

A Riemann-féle geometriában a görbület nemcsak a helynek, hanem a sík állásának is függvénye, ha $n \geq 3$. F. SCHUR ki-mutatta,¹ hogy ha a görbület független a sík állásától, akkor a helytől is független. Jelen dolgozatban kimutatom, hogy az állandó görbületű Riemann-féle tereket már az is jellemzi, hogy görbületük a helytől független.

Induljunk ki egy n -mértetű Riemann-féle térből és vonatkoz-tassuk azt x^1, x^2, \dots, x^n koordinátákra. Ekkor az ívelemet

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^k \quad (1)$$

pozitív definit quadratikus alak határozza meg.

Ehhez az ívelemhez tartozó Riemann-Christoffel-féle görbü-leti tenzort az

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + \sum_{s=1}^n (\Gamma_{ik}^s \Gamma_{jst} - \Gamma_{il}^s \Gamma_{jst}), \quad (2)$$

egyenletek határozzák meg. Ezekben Γ_{ijk} és Γ_{ik}^j az első, illetve másodfajú Christoffel-féle szimbólumok. Ezeket, amint ismeretes, a g_{ir} -ek és az ezekhez reciprok g^{ir} -ek által a következő módon lehet kifejezni:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right), \quad (3)$$

$$\Gamma_{ik}^j = \sum_{r=1}^n g^{sr} \Gamma_{irk}.$$

¹ F. SCHUR, Math. Ann., 22. k., 1886., 563. o.

Miként (2) mutatja, a görbületi tenzornak az alábbi nevezetes szimmetriatulajdonságai vannak:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} &= R_{klij}, \\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Az (x^i) pontban a sík állását két (ξ^i) és (η^i) vektorral adjuk meg. Az ezekkel megadott parallelogrammát a

$$p^{ik} = \xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i \quad (5)$$

Plücker-féle tenzor teljesen meghatározza. A (ξ^i, η^i) sík állásához tartozó Riemann-féle görbületet a

$$K = - \sum_{(ij)(kl)} \frac{R_{ijkl} p^{ij} p^{kl}}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) p^{ij} p^{kl}} \quad (6)$$

skaláris határozza meg. A (6)-os összegben a zárójelben lévő indexeket az n elem kombinációi szerint kell venni és az összegezést ennek megfelelően kell végezni. A (6) nevezőjében szereplő forma

$$T_{ijkl} = g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk} \quad (7)$$

együtthatói egy olyan tenzort alkotnak, amelynek szintén megvannak a (4)-ben kifejezett szimmetriatulajdonságai. A (6)-os összeg számlálója és nevezője a p^{ik} Plücker-féle tenzorban quadratikussá alakul. Ez akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha összes együtthatói eltűnnek. Ebből következik, hogy K (6) alatti előállítása egyértelmű. K -nak geometriai tartalma, amint ismeretes,² a következő. A (ξ^i) és a (η^i) vektort infinitezimális vektorokkal helyettesítjük. Az általuk meghatározott parallelogramma mentén az (x^i) csúcspontból kiindulva a parallelogrammának síkjában fekvő tetszőleges (v^i) vektort addig toljuk párhuzamosan, míg (x^i) -be visszatér. Az így meghatározott vektornak merőleges projekciója a parallelogramma síkjára az eredeti vektorral egy bizonyos ω szöget zár be. A görbület az ω -nak és a parallelogramma területmértékének hányadosa. A (6)-ban szereplő nevező ennek a területmértéknek négyzete. K értelmezése

² H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 5. kiadás, Berlin, 1923, 130. o.

alapján, nemcsak a helynek, hanem még a sík állásának is függvénye.

A következőkben azokat a Riemann-féle tereket akarjuk meghatározni, amelyekben a görbület csak a sík állásától függ. Ehhez szükséges és elegendő, hogy

$$\frac{\partial K}{\partial x^l} \equiv 0 \quad (l=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

legyen. Ezeket az egyenleteket a (6) miatt így is lehet írni:

$$\sum_{(ii')(kk')(rr')(ss')} \left(\frac{\partial R_{ii'kk'}}{\partial x^l} T_{rr'ss'} - \frac{\partial T_{ii'kk'}}{\partial x^l} R_{rr'ss'} \right) p^{ii'} p^{kk'} p^{rr'} p^{ss'} \equiv 0 \quad (9)$$

A zárójelben lévő indexekre áll az, amit a (6) alatt megjegyeztünk. A p^{ik} mennyiségek egymástól nem függetlenek; ezért (9)-ben ezek helyébe megint a (ξ^i) és (η^i) vektorokat vezetjük be. Az $R_{ii'kk'}$ és $T_{ii'kk'}$ tenzorok (4) alatt kifejezett szimmetriatulajdonságai miatt a (9) egyenleteket a

$$\sum_{ii'kk'rr'ss'} \left(\frac{\partial R_{ii'kk'}}{\partial x^l} T_{rr'ss'} - \frac{\partial T_{ii'kk'}}{\partial x^l} R_{rr'ss'} \right) \xi^i \eta^{i'} \xi^k \eta^{k'} \xi^r \eta^{r'} \xi^s \eta^{s'} \equiv 0 \quad (10)$$

alakban írjuk. (10)-nek további diszkussziója céljából a tetszőleges (ξ^i) és (η^i) vektorokat három fokozatban fogjuk specializálni.

Első lépés: Ha

$$\begin{aligned} \xi^i &\neq 0, \quad \xi^1 = \xi^2 = \dots = \xi^{i-1} = \xi^{i+1} = \dots = \xi^n = 0, \\ \eta^{i'} &\neq 0, \quad \eta^1 = \eta^2 = \dots = \eta^{i'-1} = \eta^{i'+1} = \dots = \eta^n = 0, \end{aligned}$$

akkor (10)-ből adódik, hogy

$$\frac{\partial R_{ii'ii'}}{\partial x^l} T_{ii'ii'} - \frac{\partial T_{ii'ii'}}{\partial x^l} R_{ii'ii'} = 0. \quad (11)$$

A (11)-ben (7) miatt

$$T_{ii'ii'} = g_{ii} g_{i'i'} - g_{ii'}^2 > 0. \quad (12)$$

(11)-et az $R_{ii'ii'}$ -nek lineáris homogén differenciálegyenlet rendszereként foghatjuk fel. Megoldásai tehát csak

$$R_{ii'ii'} = c \cdot S_{ii'ii'} \quad (13)$$

alakúak lehetnek, ahol c tetszőleges állandó és a $S_{\bar{u}\bar{u}'}$ függvények egyértelműen meghatározott függvények. A (11) közvetlenül mutatja, hogy

$$S_{\bar{u}\bar{u}'} = T_{\bar{u}\bar{u}'},$$

tehát

$$R_{\bar{u}\bar{u}'} = c \cdot T_{\bar{u}\bar{u}'}. \quad (14)$$

Második lépés:

$$\begin{aligned} \xi^i \neq 0, \quad \xi^1 = \xi^2 = \dots = \xi^{i-1} = \xi^{i+1} = \dots = \xi^n = 0, \\ \eta^{i'} \neq 0, \quad \eta^{k'} \neq 0, \quad \eta^1 = \eta^2 = \dots = \eta^{i'-1} = \eta^{i'+1} = \dots = \eta^{k'-1} = \\ \eta^{k'+1} = \dots = \eta^n = 0. \end{aligned}$$

Ha ezeket a vektorkomponenseket (10)-be helyettesítjük, továbbá (4)-et és (14)-et figyelembe vesszük, akkor

$$T_{\bar{u}\bar{u}'} \left(\frac{\partial R_{\bar{u}'ik'}}{\partial x^l} - c T_{\bar{u}'ik'} \right) - \frac{\partial T_{\bar{u}\bar{u}'}}{\partial x^l} (c T_{\bar{u}'ik'} - R_{\bar{u}'ik'}) = 0. \quad (15)$$

A (15)-ös egyenletek az $R_{\bar{u}'ik'}$ -k számára lineáris differenciálegyenletrendszert alkotnak. Megoldásai tehát következő alakúak:

$$R_{\bar{u}'ik'} = c_1 \phi_{\bar{u}'ik'} + \chi_{\bar{u}'ik'}, \quad (16)$$

ahol c_1 tetszőleges állandó és $\phi_{\bar{u}'ik'}$ és $\chi_{\bar{u}'ik'}$ egyértelműen meghatározott függvények. A (15)-ből látható, hogy

$$c_1 = c, \quad \phi_{\bar{u}'ik'} = T_{\bar{u}'ik'}, \quad \chi_{\bar{u}'ik'} \equiv 0. \quad (17)$$

A (16) és (17)-ből következik tehát, hogy

$$R_{\bar{u}'ik'} = c T_{\bar{u}'ik'}. \quad (18)$$

Harmadik lépés:

$$\begin{aligned} \xi^i \neq 0, \quad \xi^k \neq 0, \quad \xi^1 = \xi^2 = \dots = \xi^{i-1} = \xi^{i+1} = \dots = \xi^{k-1} = \\ = \xi^{k+1} = \dots = \xi^n = 0, \\ \eta^{i'} \neq 0, \quad \eta^{k'} \neq 0, \quad \eta^1 = \eta^2 = \dots = \eta^{i'-1} = \eta^{i'+1} = \dots = \eta^{k'-1} = \\ = \eta^{k'+1} = \dots = \eta^n = 0. \end{aligned}$$

Ha ezeket a vektorkomponenseket (10)-be helyettesítjük, akkor (4), (14) és (18) figyelembevételével következik, hogy

$$\begin{aligned} T_{\bar{u}\bar{u}'} \left[\frac{\partial (R_{\bar{u}'kk'} + R_{k'i'ik'})}{\partial x^l} - c \frac{\partial (T_{\bar{u}'kk'} + T_{k'i'ik'})}{\partial x^l} \right] + \\ + c \frac{\partial T_{\bar{u}\bar{u}'}}{\partial x^l} [T_{\bar{u}'kk'} + T_{k'i'ik'}] - \frac{\partial T_{\bar{u}\bar{u}'}}{\partial x^l} [R_{\bar{u}'kk'} + R_{k'i'ik'}] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

(19) az $R_{ii'kk'} + R_{ki'ik'}$ függvények lineáris differenciálegyenleteként fogható fel. A megoldásnak a következő alakúnak kell lennie:

$$R_{ii'kk'} + R_{ki'ik'} = c_2 \varrho_{ii'kk'} + x_{ii'kk'}, \quad (20)$$

ahol c_2 tetszőleges állandó és a $\varrho_{ii'kk'}$ függvények egyértelműen vannak meghatározva. Tekintettel (19)-re következik, hogy

$$c_2 = c, \quad \varrho_{ii'kk'} = T_{ii'kk'} + T_{ki'ik'}, \quad x_{ii'kk'} \equiv 0. \quad (21)$$

A (21) miatt tehát (20) így írható:

$$R_{ii'kk'} + R_{ki'ik'} = c [T_{ii'kk'} + T_{ki'ik'}]. \quad (22)$$

Ebben a harmadik lépésünkben kimutatjuk, hogy

$$R_{ii'kk'} = c T_{ii'kk'}. \quad (23)$$

E célból (23) jobb- és baloldalának képezzük az

$$R_{ii'kk'} - c T_{ii'kk'} = S_{ii'kk'} \quad (24)$$

különbségét. (4) és (22)-ből következik, hogy az $S_{ii'kk'}$ mennyiségek a

$$\begin{aligned} S_{ii'kk'} + S_{ik'ki'} + S_{ik'ik'} &= 0, \\ S_{ii'kk'} + S_{ki'ik'} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

egyenleteknek tesznek eleget. Ezekből következik (23), vagyis hogy

$$S_{ii'kk'} = 0,$$

amit be akartunk bizonyítani. A (23) szükséges feltétel arra nézve, hogy a görbületi tenzor (10)-nek eleget tegyen. E feltétel azonban elegendő is, miként (10) mutatja. A (7) egyenletek segítségével a görbületi tenzor végleges alakja a következő:

$$R_{ijkl} = c(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (26)$$

(26) azt fejezi ki, hogy a Riemann-féle tér görbülete állandó. A görbületi tenzornak a (24) alatti kifejezése állandó görbületű Riemann-féle terek esetén a görbületi tenzornak legáltalánosabb kifejezése.

Varga Ottó.

ÜBER EINE CHARAKTERISIERUNG DER RIEMANNSCHEN RÄUME KONSTANTER KRÜMMUNG.

Bekanntlich ist der RIEMANNSche Krümmungskalar für eine Flächenstellung definiert und daher im Falle, dass der Raum von höherer als zweiter Dimension ist, nicht nur eine Ortsfunktion, sondern auch eine Funktion der Flächenstellung. F. SCHUR¹ hat bewiesen, dass aus der Unabhängigkeit der Krümmung von der Stellung auch die Unabhängigkeit vom Orte folgt. In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass der Raum auch dann von konstanter Krümmung ist, wenn der Krümmungsskalar vom Orte unabhängig ist.

Otto Varga.

EGY GÖMBFELÜLET BEFEDÉSE EGYBEVÁGÓ GÖMBSÜVEGEKKEL.

E lapok XLIX. kötetében megjelent «Az egyenlőoldali háromszögrács, mint szélsőértékfeladatok megoldása» című dolgozatom tárgya a következő probléma: Fedjünk le egy végesben fekvő adott alakú síkidomot egyenlősugarú körlapokkal. Meghatározandó e körlapok minimális számának aszimptotikus értéke arra az esetre, amidőn a lefedendő síkidom területe a körlapok területéhez viszonyítva nagy. Dolgozatomban csak olyan körelhelyezkedéseket tekintettem, amelyekben a sík bármely tartományát legfeljebb két körlap fedi s ezen kikötés mellett a felvetett probléma megoldására két különböző bizonyítást adtam.¹

Az alábbiakban az említett második bizonyítást kiterjesztjük az általános esetre² s egyben bebizonyítjuk a következő általánosabb tételt:

Ha az $n \geq 3$ számú egyenlő s_n felszínű gömbsüveg lefedi az egységgömb felületét, akkor

$$s_n \geq 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6} \right). \quad (1)$$

Ez az egyenlőtlenség $n=3$ -, 4 -, 6 - és 12 -re pontos, n -nek nagy értékére pedig a fenti síkbeli problémára vonatkozó pontos

¹ Idézett dolgozatom megjelenése után jutott tudomásomra, hogy ezt a problémát már KERSHNER R. megoldotta egész általánosan «The number of circles covering a set» című dolgozatában [Amer. J. Math. 61 (1939) 665—671]. Az általam adott mindkét bizonyítás azonban különbözik KERSHNERétől. Ugyancsak később tudtam meg, hogy ezt a problémát KERSHNERtől szintén függetlenül KÁRTESZI FERENC is megoldotta.

² Ennek lehetőségére már említett dolgozatomban utaltam. Az alábbiakban egyébiránt nem tételezzük föl idézett dolgozatom ismeretét.

aszimptotikus becslést adja. A síkbeli problémának ilyen irányú kiterjesztése azért is figyelmet érdemel, mert általa egy látszólag távolabb eső kérdésre is feleletet kapunk. A fenti tétel ugyanis $n \geq 4$ -re egyenértékű a következővel:

Ha két koncentrikus r_n és R_n sugarú gömb közrefog egy n -lapot, akkor

$$\frac{r_n}{R_n} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}. \quad (1a)$$

Az egyenlőség jele itt csak szabályos tetraéder, hexaéder vagy dodekaéder esetében érhető el.³

Vezessük be két konvex K és H tartomány $\eta(K, H)$ eltéréseinek az irodalomban használatos következő értelmezését: $\eta(K, H)$ a legkisebb olyan tulajdonságú szám, hogy a két tartomány közül bármelyiknek egy tetszőszerinti pontjához tartozó $\eta(K, H)$ sugarú környezetében van a másik tartománynak pontja. Ennek a fogalomnak segítségével eredményünket még a következőképpen is kifejezhetjük:

Bármely P_n n -lapnak valamely G egységgömbtől való eltérése

$$\eta(G, P_n) \geq \frac{\sin \frac{2}{n-2} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{n-4}{n-2} \frac{\pi}{6}}. \quad (1b)$$

Ez az egyenlőtlenség n -nek nagy értékére a következő pontos aszimptotikus becslést adja: Ha \bar{P}_n jelöli azt az n -lapot amelynek egy G egységgömbtől való eltérése a lehető legkisebb, akkor $\eta(G, \bar{P}_n) \sim \frac{2\sqrt{3}\pi}{9n}$.

Mielőtt (1) bizonyítására térnénk, említsünk még meg egy analog eredményt, amely lényegében arra vonatkozólag ad bec-

³ E szerint egy megadott G gömb köré írt 4, 6, vagy 12 lappal bíró poliéderek közül a poliédert tartalmazó G -vel koncentrikus legkisebb gömb szabályos tetraéderre, hexaéderre, illetőleg dodekaéderre a lehető legkisebb. A szabályos oktaéder és ikozaéder nem megoldása a megfelelő szélsőértékfeladatnak. [V. ö. FEJES L.: A szabályos testek, mint szélsőértékfeladatok megoldásai. Mat. és Term.-tud. Értesítő 61 (1942) 471—477.]

lést, hogy hány adott felszínű gömbsüveg helyezhető el egy gömbfelületen úgy, hogy egyetlen gömbsüvegnek se legyen közös része valamelyik másikkal:⁴ Egy egységgömb n (≥ 3) pontja között mindig van két olyan, amelynek egymástól mért távolsága $d_n \leq \left(4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$. Ez az egyenlőtlenség $n = 3$, 4-, 6- és 12-re pontos, n -nek nagy értékére pedig a legsűrűbb síkbeli körelhelyezkedés problémájának megoldását adja.

*

A gömbfelület valamely részét és e rész felszínét az alábbiakban ugyanazzal a szimbolummal jelöljük. Föltételezhetjük továbbá, hogy $n \geq 4$, mert $n = 3$ -ra az (1) alatti egyenlőtlenség azt a könnyen belátható tényt fejezi ki, hogy valamely gömb nem fedhető le három félgömbnél kisebb gömbsüveggel.

Legyenek a G egységgömböt lefedő (félgömbnél kisebb) egybevágó gömbsüvegek s_1, s_2, \dots, s_n , tetőpontjuk O_1, O_2, \dots, O_n . Tekintsük azt a K_n n -lapot, amelynek lapjai G -t az O_1, O_2, \dots, O_n pontban érintik. Föltehetjük, hogy K_n -nek minden csúcspontjában 3 él fut össze. Ha ugyanis K_n -nek valamelyik csúcspontban $3 + s$ él találkozik, akkor ez a csúcspont az $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ pontrendszer alkalmas infinitezimális elmozgatása által s számú 3-élű csúcsponttá esik szét. Valamely $3 + s$ élű csúcspontot ilyen módon s számú 3-élű csúcspont határhelyezetének tekintjük. Ilyen értelemben K_n csúcspontjainak száma — az EULER-féle poliédertétel folyományaként — pontosan $2n - 4$. Ha K_n lapjait a G -vel való O_i érintési pontok indexével látjuk el, akkor K_n minden egyes csúcspontjához egyértelműen hozzárendelhetünk egy (ijk) indexhármast, t. i. az illető csúcspontban találkozó három lap indexét. Kimutatjuk, hogy ha két x és y tartomány közös részét xy -nal jelöljük, akkor

$$ns_n - \frac{1}{2} \sum_{(ijk)} (s_i s_j + s_j s_k + s_k s_i - 2s_i s_j s_k) = 4\pi, \quad (2)$$

⁴ FEJES L.: Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jahresbericht der D. M. V. (Megjelenőben.)

ahol az összegezés kiterjesztendő K_n valamennyi csúcspontjához tartozó indexhármásra.

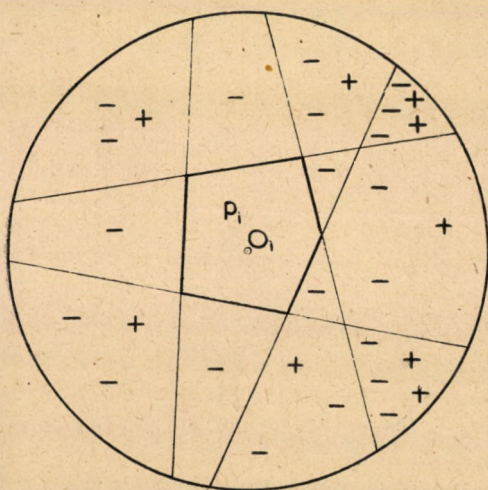
Ez az egyenlőség abban az esetben, amidőn az összegben szereplő (ijk) indexhármások kimerítik azokat a harmadrendű kombinációkat, amelyekre vonatkozólag s_i, s_j és s_k -nak közös felületrésze van, könnyűszerrel belátható. Az általános esetben egyenlőségünk a következő módon igazolható.

Ragadjuk ki K_n i indexű lapját és tételezzük föl (az indexek halmozásának elkerülése végett), hogy a szomszédos lapok indexe ciklikus sorrendben $1, 2, \dots, \nu$. Ha a kiválasztott lapnak G középpontjából G -re való vetületét p_i -vel, s_i -nek p_i oldalai által lemetezett részeit rendre t_1, t_2, \dots, t_ν -vel jelöljük, akkor

$$p_i = s_i - (t_1 + t_2 + \dots + t_\nu) + (t_1 t_2 + t_2 t_3 + \dots + t_\nu t_1). \quad (3)$$

Írjunk ennek belátásához t_1 -nek mindazon résztartományába, amelyet a p_i -t határoló f_1, f_2, \dots, f_ν főkör határoz meg, egy-egy «—»

jelet. (L. az ábrát.) Végezzük el ezt a műveletet külön-külön t_2, t_3, \dots és t_ν -re is, majd írjunk rendre a $t_1 t_2, t_2 t_3, \dots, t_\nu t_1$ tartományoknak minden résztartományába külön-külön egy-egy «+» jelet. Könnyen belátható, hogy a «—» és «+» jelek számának az egyes résztartományokban vett k különbsége bármelyik f_i főkör átlépésekor változatlan marad, amiből következik, hogy k értéke



minden tartományban állandó. Mivel azonban a p_i oldalaira támaszkodó tartományokba csak egyetlen «—» jelet írtunk, «+» jelet viszont egyet sem, azért k értéke minden tartományban 1. Látható ebből, hogy (3) jobboldalán az s_i után következő tagok összege megadja s_i -nek p_i -n kívül fekvő részének negatív elő-

jellel vett felszínét, amivel a (3) alatti egyenlőséget igazoltuk.⁵

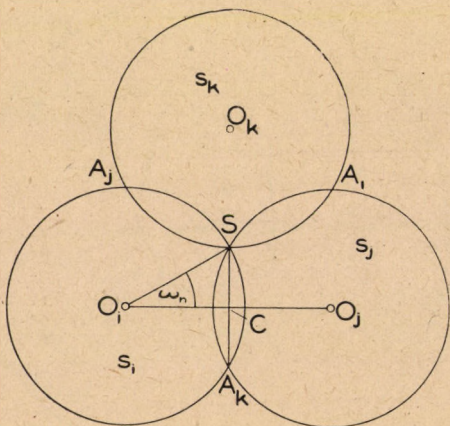
Összegezzük az ilyen módon i -nek különböző értékeire nyert egyenlőségeket $i=1$ -től n -ig, akkor a baloldalon nyilván a gömb felszínét nyerjük. A jobboldalon nyert összeg tagjai viszont 1. a gömbsüvegek felületösszege, 2. mindazok a negatív előjellel vett $s_i s_j$ tagok, amelyekre K_n i -edik és j -edik lapja közös élen nyugszik, 3. mindazok az $s_i s_j s_k$ tagok, amelyekre K_n i -edik, j -edik és k -adik lapja közös csúcsba torkoll. Ezzel a (2) alatti egyenlőséget bebizonyítottuk.

Vizsgáljuk most a (2) baloldalán lévő összeg

$$s_i s_j + s_j s_k + s_k s_i - 2s_i s_j s_k = u_{ijk}$$

tagjait. Vegyük észre, hogy u_{ijk} az s_i , s_j és s_k gömbsüveg által legalább kétszer fedett rész felületével egyenlő. Határozzuk meg u_{ijk} minimumát azon feltétel mellett, hogy az $s_i s_j s_k$ tartomány gömbi körívháromszög, amely azonban egy ponttá is összezsugorodhat. Könnyen belátható, hogy u_{ijk} csakis ebben az utóbbi esetben lehet minimális. Ha ugyanis $s_i s_j s_k > 0$, akkor bármelyik gömbsüveget elmozgathatjuk úgy, hogy u_{ijk} csökkenjen. Föltehetjük tehát, hogy $s_i s_j s_k$ egyetlen S pontból áll. Jelöljük a három gömbsüveget határoló körök S -től különböző három metszéspontját a harmadik gömbsüveg indexével rendre A_i , A_j , A_k -val (l. az ábrát). Annak a feltétele, hogy u_{ijk} minimális legyen

az, hogy $\widehat{A_i S} = \widehat{A_j S} = \widehat{A_k S}$ legyen, mert ha pl. $\widehat{A_j S} \neq \widehat{A_k S}$, akkor u_{ijk} az s_i gömbsüvegnek S körüli megfelelő irányú elforgatásával csökkenthető lenne.



⁵ Ez az egyenlőség teljes indukcióval is könnyen igazolható.

Az előbbi feltétel egyértelműen meghatározza u_{ijk} minimális helyzetét: u_{ijk} akkor éri el a minimumát, amidőn az $O_i O_j O_k \Delta$ az adott gömbsüvegeket határoló körökkel egybevágó körbe beírt szabályos háromszög. Számítsuk ki $u_{ijk} = \bar{u}_{ijk} = 3s_i s_j$ értékét erre az esetre!

Ha s_n alapkörének sugara ϱ_n , akkor $\overline{O_i O_j} = \sqrt{3}\varrho_n$. Legyen az $O_i O_j$ és SA_k főkör $\overline{s_i s_j}$ -ben fekvő metszéspontja C . Ekkor az $O_i SC$ derékszögű gömbháromszögben $\angle CSO_i = \frac{\pi}{3}$; az $\angle SO_i C = \omega_n$ szöget illetőleg pedig

$$\cos \omega_n = \frac{\operatorname{tg} \widehat{CO_i}}{\operatorname{tg} \widehat{SO_i}}.$$

Innen a $\sin \widehat{CO_i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varrho_n$ és $\sin \widehat{SO_i} = \varrho_n$ összefüggés figyelembevételével

$$\operatorname{ctg}^2 \omega_n = 3(1 - \varrho_n^2). \quad (4)$$

A keresett felület mármost

$$\bar{u}_{ijk} = 6 \left[\frac{2\omega_n}{2\pi} s_n - \left(2\omega_n + \frac{2\pi}{3} - \pi \right) \right].$$

Ha bevezetjük az $s_n = 2\pi(1 - h_n)$ jelölést, akkor

$$\bar{u}_{ijk} = 6 \left(\frac{\pi}{3} - 2h_n \omega_n \right).$$

E szerint a (2) alatti összegben szereplő valamennyi (ijk) indexhármasra

$$s_i s_j + s_j s_k + s_k s_i - 2s_i s_j s_k \geq 6 \left(\frac{\pi}{3} - 2h_n \omega_n \right).$$

Meggondolva mármost, hogy a (2) alatt szereplő összeg tagjainak száma $2n - 4$:

$$2\pi n(1 - h_n) - 6(n - 2) \left(\frac{\pi}{3} - 2h_n \omega_n \right) \geq 2\pi,$$

azaz

$$\omega_n \geq \frac{n}{n - 2} \frac{\pi}{6}.$$

Ebből azonban — tekintve, hogy (4) szerint $\sqrt{3}h_n = \operatorname{ctg} \omega_n$, azaz $s_n = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \omega_n\right)$ — közvetlenül nyerjük az (1) alatti egyenlőtlenséget.

Bizonyításunkból az is kitűnik, hogy az egyenlőség jele (1)-ben csak akkor nem hagyható el, ha K_n háromélű csúcsokkal bíró szabályos test.

Fejes László.

ÜBER DIE BEDECKUNG EINER KUGELFLÄCHE DURCH KONGRUENTE KUGELKALOTTEN.

Es wird folgender Satz bewiesen:

Ist ein konvexes n -Flach einer Kugel vom Halbmesser r_n umschrieben und einer konzentrischen Kugel vom Halbmesser R_n eingeschrieben, so ist

$$\frac{r_n}{R_n} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}.$$

Diese Abschätzung ist für $n=4, 6$ und 12 genau und ergibt für grosse Werte von n den Kershnerschen Satz¹ über die genaue asymptotische Abschätzung der Mindestzahl derjenigen Einheitskreise, die eine hinreichend grosse ebene Figur vorgegebener Gestalt überdecken.

László Fejes.

A RÁCSHÁROMSZÖGEKRŐL ÉS RÁCSPARALLELOGRAMMÁKRÓL.

1. Nevezzük rácspontoknak az (x, y) koordinátasík azon pontjait, amelyeknek koordinátái egész számok. Nevezzük továbbá elemi rácsháromszögnek és elemi rácsparallelogrammának az olyan háromszöget, ill. parallelogrammát, amelynek csücspontjai rácspontok, de sem a kerületén, sem a belsejében nem tartalmaz rácspontot.

Régen ismeretes, hogy *valamennyi elemi rácsparallelogramma területe 1*, vagy másképpen megfogalmazva: *valamennyi elemi rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$* . VERESS PÁL vetette fel a kérdést, hogyan lehet ezt a tételt elemi geometriai úton igazolni? Ennek a feladatnak legújabban két elemi geometriai megoldása is jelent meg e Lapokban VERESS PÁLTÓL¹ és HAJÓS GYÖRGYTŐL,² továbbá egy elemi (de nem geometriai) megoldása RÉDEI LÁSZLÓTÓL.³ A következőkben egy újabb elemi geometriai bizonyítást adjuk ennek a tételnek. Az állítást második formájában fogjuk igazolni.

2. Bizonyításunk a következő segédtételel alapszik: ha R_0 típusúnak nevezzük azt az elemi rácsháromszöget, amely kongruens a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ háromszöggel, akkor *valamennyi elemi rácsháromszög tompaszögű, kivéve az R_0 típusúakat*.

A segédétel bizonyítása folyamán azt fogjuk igazolni, hogy a nem R_0 típusú elemi rácsháromszögek hegyesszögei 45° -nál kisebbek.

¹ VERESS PÁL: Diophantosi egyenletek geometrikus megoldása. Mat. és Fiz. Lapok 48 (1941), 393—397.

² HAJÓS GYÖRGY: A rácsparallelogrammákról. U. o. 398—400.

³ RÉDEI LÁSZLÓ: A rácsparallelogrammákról, u. o. 49 (1942), 73—75.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

a) az $A_1A_2A_3$ elemi rácsháromszög A_1 csúcsában hegyesszög van;

b) az A_1 csúcs a koordináta-rendszer kezdőpontjába esik;

c) az A_2 csúcs az első síknyolcadba esik.

Az A_2 csúcs helyét illetően két eset lehetséges:

A. az A_2 csúcs az első síknyolcad belsejében van;

B. az A_2 csúcs az első síknyolcad kerületén van.

A B eset csak akkor fordul elő, ha az A_2 csúcs az $(1, 0)$ helyen van (B_1 eset), vagy az $(1, 1)$ helyen van (B_2 eset).

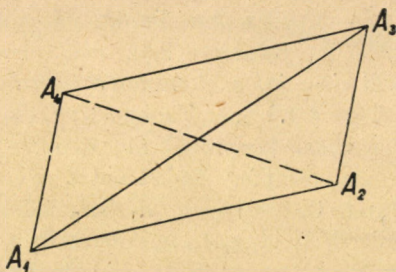
Az A esetben az A_3 csúcs nem lehet a 4., 5. vagy 6. síknyolcadban, mert ekkor az A_1 csúcsban nem volna hegyesszög. Behizonyítjuk, hogy A_3 csak az első síknyolcadba eshet. Mert ha A_3 a 2. vagy 3. síknyolcadban volna, akkor egyszerűen belátható, hogy az $(1, 1)$ pont a háromszög belsejében vagy kerületén lenne, háromszögünk tehát nem lehetne elemi rácsháromszög. Hasonlóan nem lehet az A_3 pont a 7. ill. 8. síknyolcadban, mert akkor háromszögünk tartalmazná a $(0, 1)$ pontot. Állításunk tehát igazolt és megjegyezhetjük, hogy az A esethez tartozó háromszögeknél $A_1 \nless 45^\circ$.

A B_1 esetben az A_3 csúcs csak az 1., 2., 7. vagy 8. síknyolcadba eshet. Az első esetben az A_1 -nél levő szög 45° -nál kisebb kivéve, ha A_3 az $(1, 1)$ helyen van. (Ez a háromszög R_0 típusú.) A második esetben, tehát akkor, amikor A_3 a 2. síknyolcadba esik, az $A_1A_2A_3$ háromszög kerületén vagy belsejében tartalmazza vagy az $(1, 1)$, vagy a $(0, 1)$ pontot. Kivételek az az eset, amikor A_3 épp a két említett pont valamelyike ekkor megint R_0 típusú háromszögekkel van dolgunk. A harmadik és negyedik eset analóg az első kettővel, ezeket nem tárgyaljuk külön.

A B_2 esetben az A_3 pont csak az 1., 2., 3. vagy 8. síknyolcadba eshet. Ha az 1. vagy 2. síknyolcadba esik, akkor az A_1 -nél lévő szög 45° -nál kisebb, kivéve, ha A_3 az x -, vagy y -tengelyen van. A kivételek most is R_0 típusú háromszögek. Más eset nem is fordulhat elő, mert ha A_3 a 3., ill. 8. síknyolcadban volna, akkor háromszögünk szükségképpen tartalmazná a $(0, 1)$, ill. $(1, 0)$ pontot.

Mivel az $A_1A_2A_3$ háromszög másik hegyesszögére hasonló megfontolás érvényes, segédítélünk bizonyított.

3. Most rajzoljunk egy $R_1 (A_1 A_2 A_3)$ elemi rácsháromszöget, amelynek A_2 csúcsában tompaszög van. Egészítsük ki ezt egy $A_1 A_2 A_3 A_4$ paralelogrammává az ábra szerint. (A paralelogramma átlója a tompaszöggel szemben levő oldal.) Ez a paralelogramma nem tartalmaz rácspontot, mert ha az $A_1 A_3 A_4$ háromszög belsejében,



ben, vagy kerületén volna rácspont, akkor elforgatással igazolhatnánk, hogy a vele kongruens $A_1 A_2 A_3$ háromszög is tartalmaz rácspontot a belsejében vagy a kerületén. Tehát $A_1 A_2 A_4$ elemi rácsháromszög: jelöljük R_2 -vel. Minden további nélkül világos, hogy R_2 kerülete kisebb, mint R_1 -é. Ha az R_2 háromszögnek van tompaszöge, akkor R_2 -höz ugyanúgy szerkesztünk paralelogrammát, mint az előbb R_1 -hez. Így kapunk egy R_3 háromszöget, amelynek a kerülete kisebb, mint R_2 -é. Ezt az eljárást azonban nem folytathatjuk vég nélkül, hiszen véges nagyságú rácsháromszögből indultunk ki. Lesz tehát az R_1, R_2, R_3, \dots sorozatban olyan R_n háromszög, amelyhez már nem szerkeszthetünk kisebb kerületű elemi rácsháromszöget. Ez a háromszög nem lehet tompaszögű, tehát csakis R_0 típusú lehet.

Másrészt R_1 és R_2 területe ugyanakkora, mert mindkettőt az $A_1 A_2 A_3 A_4$ paralelogramma felezésével kapjuk. Hasonlóan következtethetjük, hogy az R_k háromszög területe egyenlő R_{k+1} területével, tehát R_1, R_2, \dots, R_n olyan sorozat, amelynek tagjai csökkenő kerületűek, de egyező területűek. Valamennyi R_k területe egyenlő R_n területével, azaz $1/2$ -l. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Makai Endre.



ÜBER GITTERDREIECKE UND GITTERPARALLELOGRAMME.

Ein Dreieck soll ein elementares Gitterdreieck heissen, wenn seine Eckpunkte ganzzahlige rechtwinklige Koordinaten haben, das aber — den Rand inbegriffen — keine weitere Punkte mit ganzzahligen Koordinaten enthält. Folgender bekannte Satz wird elementargeometrisch bewiesen: *der Inhalt eines jeden elementaren Gitterdreiecks ist $\frac{1}{2}$.* Der Beweis beruht auf folgenden beiden Tatsachen: 1. ein jedes elementares Gitterdreieck ist entweder kongruent mit dem Dreieck $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$, oder hat es einen stumpfen Winkel und 2. zu einem jeden stumpfwinkligen elementaren Gitterdreieck $A_1A_2A_3$ kann man ein anderes elementares Gitterdreieck $A_1A_2A_4$ mit demselben Inhalt, aber von kleinerem Umfang konstruieren. (Siehe die Abbildung.)

Aus diesem Satze folgt unmittelbar der bekannte Satz über den Inhalt von Gitterparallelogrammen.

E. Makai.

A LOGIKAI FÜGGVÉNYKALKULUS ELDÖNTÉS-PROBLÉMÁJÁNAK REDUKCIÓJÁRÓL.

1. Azok az ellentmondások, melyekre az infinitezimális analízis, majd a halmazelmélet ú. n. naív felépítésében használt módszerek vezettek, szükségessé tették, hogy a matematika ellentmondásnélküliségét vizsgálat tárgyává tegyék. Erre a feladatra vállalkozott a HILBERT-féle bizonyításelmélet, melynek egyik fontos segédeszköze a logikai függvénykalkulus¹.

A függvénykalkulus *formuláinak* nevezzük az olyan kifejezéseket, melyek elemi logikai változókból és logikai függvényekből épülnek fel az elemi logikai műveletek és quantorok segítségével. *Zártnak* nevezünk egy formulát, ha nem fordul elő benne szabad individuumváltozó; *praenexnek*, ha minden quantor az elején van és az egész utána következő formularészre vonatkozik. Egy praenex formula tehát két részre tagozódik. Az első, quantorokból álló részt a formula *praefixumának*, az utána következő logikai kifejezést, mely quantort nem tartalmaz, *magkifejezésnek* nevezzük.

A függvénykalkulus azon formuláit, melyeknek logikai értéke mindig \uparrow («igaz»), — bárhogy is adunk meg egy nem üres individuumtartományt², bármely ezen értelmezett függvényeket, ill.

¹ A bizonyításelmületről, s ennek keretében a matematikai logikáról is magyar nyelvű áttekintést ad KALMÁR LÁSZLÓ cikke: A HILBERT-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei, *Mat. és Fiz. Lapok*, 48 (1941), 65—116. 1. Lásd főleg a 2. és 3. részt, 77—87. 1. — Az ott előforduló fogalmakat és eredményeket ismerteknek teszem fel, itt csak a legfontosabb fogalmakat foglalom össze.

² Célszerű az üres halmazt kizárni a megengedett individuumtartományok közül. Épp ezért ezután, ha individuumtartományról beszélünk, hallgatólag feltesszük, hogy van eleme. Ha viszont magunk szerkesztünk egy individuumtartományt, gondoskodnunk kell róla, hogy ne legyen üres.

elemeket helyettesítünk a függvényváltozók, ill. szabad individuum-változók helyébe, végül az elemi logikai változók értékét akár-hogy választjuk — a függvénykalkulus *identitásainak* nevezzük.

A függvénykalkulus legfontosabb kérdése az *eldöntés-probléma*. Ezt az elnevezést két, egymással szoros kapcsolatban lévő problémára szokás használni. *Egyik értelemben* eldöntés-problémán³ egy olyan eljárás keresését értjük, mellyel egy tetszőleges formuláról eldönthető volna, hogy identitás-e, vagy sem. A *másik értelemben* — s a továbbiakban csak ebben az értelemben fogom használni — egy olyan eljárás keresését jelenti, mellyel azt lehetne eldönteni egy formuláról, hogy kielégíthető-e vagy sem. *Kielégíthetőnek* nevezünk egy \mathfrak{A} formulát, ha található hozzá egy olyan \mathfrak{J} individuumtartomány, hogy ezen értelmezett alkalmas függvényeket, ill. \mathfrak{J} alkalmas elemeit téve a függvényváltozók, ill. szabad individuumváltozók helyébe és az elemi logikai változóknak alkalmas értéket adva, \mathfrak{A} logikai értéke \uparrow lesz.

A két probléma egymással egyenértékű, mert nyilvánvaló, hogy ha egy formula identitás, a negációja nem kielégíthető és viszont. Így, ha valamelyik értelemben sikerülne megoldani az eldöntés-problémát, az megoldást adna a másik értelemben is, csak az adott formula negációjára kellene a nyert eljárást alkalmazni.

Az eldöntés-probléma megoldása többek közt arra is módot adna, hogy egy tételről eldöntsük, következik-e egy adott axiómarendszerből, vagy sem. Ha egy axiómarendszer formalizálható a függvénykalkuluson belül, akkor könnyű belátni, hogy kifejezhető egy \mathfrak{A} zárt formulával is.⁴ Ha a \mathfrak{B} zárt formula egy tételnek a formalizálása, akkor az, hogy ez a tétel következik az axiómarendszerből, azt jelenti, hogy valahányszor egy individuumtartományon a logikai függvények valamilyen választása mellett \mathfrak{A} logikai értéke \uparrow , akkor \mathfrak{B} -é is \uparrow , tehát a \mathfrak{B} -vel formalizált

³ KALMÁR az ¹ alatt i. h. ebben az értelemben használja.

⁴ Ha egy formulában szabad változók szerepelnek, a formula azt fejezi ki, hogy ezek bármely értékére igaz a formulával kifejezett állítás; ugyanezt zárt formulával is kifejezhetjük, ha a szabad változókat általános quantorral kötjük le. Pl. azt, hogy minden szám egyenlő önmagával, úgy is kifejezhetjük, hogy $x = x$, de úgy is, hogy $(x)(x = x)$.

tétel akkor és csak akkor következménye az axiómarendszernek, ha az $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$ formula nem kielégíthető. Könnyű belátni azt is, hogy az \mathcal{A} zárt formulával kifejezett axiómarendszer akkor és csak akkor ellentmondás nélküli, ha az \mathcal{A} formula kielégíthető.

2. Az eldöntés-probléma tehát igen általános problémákat foglal magában s már ez is sejteni engedte, hogy nem adható teljes megoldása. Valóban ebben az értelemben adta meg a választ az eldöntés-problémára A. CHURCH, bebizonyítva,⁵ hogy *nem lehetséges olyan eljárás, mely minden formuláról helyesen és egyértelműen döntse el, hogy kielégíthető-e vagy sem.*

Ezt a tételt főképp két irányú kutatás előzte meg. Egyrészt megoldották az eldöntés-problémát sok egyszerűbb formulaosztályra, másrészt sikerült redukálni a problémát, oly módon, hogy megadtak olyan eljárásokat, melyekkel egy tetszőleges \mathcal{A} formulához készíthető egy kielégíthetőség szempontjából vele egyenértékű \mathcal{B} formula, amely már valamely egyszerűbb típushoz tartozik. Kielégíthetőség szempontjából egyenértékűnek — a továbbiakban csak röviden *egyenértékűnek* — nevezünk két \mathcal{A} és \mathcal{B} formulát, ha \mathcal{A} akkor és csakis akkor elégíthető ki, ha \mathcal{B} is kielégíthető. (Esetleg mind a kettő más és más individuumtartományon.)

Bár CHURCH tétele megadta az eldöntés-problémára a végleges választ, nem látszik érdektelennek megkeresni a legegyszerűbb formulatípusokat, melyeknek kielégíthetőségére az eldöntés-probléma visszavezethető. Annál is inkább, mert — amint azt még látni fogjuk — a redukciós tételek sokszor csak alig valamivel általánosabb formulatípust eredményeznek egy-egy olyan típusnál, melyre még megoldható a probléma. Ennek a kicsiny, de teljesen ki nem tölthető résznek a további szűkitése esetleg mélyebb bepillantást adhat a probléma természetébe.

A legegyszerűbb redukciós tételek például azt mondják ki, hogy *szabad az eldöntés-probléma vizsgálatánál az általánosítás megszorítása nélkül zárt és praenex formulákra szorítkozni.*

⁵ A. CHURCH, A Note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), 40—41. l. és javítás u. o., 101—102. l. Lásd erre nézve az ¹ alatt i. h. 29. lábjegyzetét is, 85. l.

Legyen ugyanis kielégíthető egy \mathfrak{A} formula, mely még nem zárt. Akkor ez azt jelenti, hogy vannak az individuumtartomány-nak olyan elemei, melyeket a szabad változók helyébe írva, az így nyert formula is kielégíthető. \mathfrak{A} -val egyenértékű formulát kapunk tehát, ha az \mathfrak{A} -ban szereplő szabad változókat a formula legelejére írt egzisztenciális quantorokkal kötjük le. (Különböző betűvel jelölt változókat egymástól és a \mathfrak{A} -ban már szereplő quantorokétól különböző kötött változóval helyettesítjük.)

Praenex alakra többféleképpen hozhatunk egy formulát. Tudjuk, hogy minden elemi logikai műveletekkel felépített formula kifejezhető például csak negáció és konjunkció segítségével.⁶ Ha átalakítás közben quantor fölé került a negáció jele, vagy már eredetileg ott volt, akkor azt «beljebb vihetjük», míg el nem érjük, hogy a negáció jele csak logikai függvények és elemi logikai változók, valamint más formulákból konjunkcióval keletkezett formularészek felett legyen; ugyanis a quantorok értelméből közvetlenül világos, hogy

$$\overline{(x)\mathfrak{A}} = (\mathbf{E}x)\overline{\mathfrak{A}}$$

és

$$\overline{(\mathbf{E}x)\mathfrak{A}} = (x)\overline{\mathfrak{A}}.$$

Ily módon tehát végül olyan formulához jutunk, melyben csak konjunkció és negáció szerepel és quantor nincs közvetlenül negáció jele alatt. Erre most a következő átalakításokat alkalmazzuk, melyek helyessége szintén közvetlenül világos a quantorok definíciójából. Ha \mathfrak{B} -ben nem fordul elő x , (ezt mindig elérhetjük úgy, hogy az x helyett szükség esetén mindenütt, ahol előfordul, egy más, \mathfrak{B} -ben nem szereplő s az \mathfrak{A} többi változóitól is különböző változót írunk), akkor

$$(x)\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} = (x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}), \quad (1)$$

$$(\mathbf{E}x)\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} = (\mathbf{E}x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}). \quad (2)$$

Továbbá

$$(x)\mathfrak{A} \& (x)\mathfrak{B} = (x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \quad (3)$$

és ha \mathfrak{A} -ban y , \mathfrak{B} -ben x nem fordul elő, akkor

$$(\mathbf{E}x)\mathfrak{A} \& (\mathbf{E}y)\mathfrak{B} = (\mathbf{E}x)(\mathbf{E}y)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}). \quad (4)$$

Ezekkel az átalakításokkal véges számú lépésben elérünk egy praenex formulához. Megjegyzendő azonban, hogy az így nyert

⁶ Lásd pl. ¹, 80. l.

prænex formulát távolról sem határozza meg egyértelműen a kiindulási formula. Így pl. a (3) átalakítás helyett először $(x)\mathfrak{B}$ -ben x helyett írhatunk egy sem \mathfrak{A} -ban, sem \mathfrak{B} -ben eddig nem szereplő változót, legyen például y ilyen, azután az így nyert formulából az (1) átalakítás és a konjunkció kommutatív törvénye segítségével nyerjük, hogy

$$(x)\mathfrak{A} \& (y)\mathfrak{B} = (x)(y)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}). \quad (5)$$

Az is nyilvánvaló, hogy, ha két egyfajta quantor egymás mellett áll, akkor szabad őket felcserélni. De a különböző quantorok sorrendje sem teljesen határozott. Így pl. a

$$(x)(y)(\mathbf{E}z)\mathfrak{A} \& (x)(y)(u)\mathfrak{B}$$

formula — ha \mathfrak{A} nem tartalmazza u -t, \mathfrak{B} pedig z -t — átalakítható $(x)(y)(\mathbf{E}z)(u)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ -be, de $(x)(y)(u)(\mathbf{E}z)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ -be is.

Végül megjegyzem még, hogy az (1)—(5) átalakítások mindkét irányban elvégezhetők, tehát egy formulából nyert prænex formulát mindig visszaalakíthatjuk az eredeti formulába.

3. Az alábbiakban két redukciós tételnek adom élesítését. Ezek már maguk is élesítései egy SKOLEM-féle redukciós tételnek⁷, mely szerint *minden formula egyenértékű egy olyan zárt prænex formulával, melynek praefixumában minden általános quantor megelőz minden egzisztenciálisat*. GÖDEL megmutatta⁸, hogy ezen felül még elérhető, hogy összesen három általános quantor szerepeljen csak és minden függvényváltozó legfeljebb két argumentumú legyen. (Egy olyan formulát, melyben csak két argumentumú függvények szerepelnek, *binaernek* nevezünk.) Ezzel szembeállítható az az eredmény, hogy az *eldöntés-probléma megoldható az olyan zárt prænex formulákra, melyekben csak*

⁷ Th. SKOLEM, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen, *Vid.-Selsk. Skr. Kristiania, I. Mat. Nat. Kl.*, 1920, Nr. 4. Lásd még D. HILBERT—P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik I* (Berlin, 1934), 158—164. l.

⁸ K. GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionen-kalküls, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, 40 (1933), 433—443. l. Egy más bizonyítását lásd Th. SKOLEM, Ein Satz über Zähl ausdrücke, *Acta Sci. Math. Szeged*, 7 (1935), 193—199. l.

két, és pedig szomszédos általános quantor van⁹; másrészt megoldható a probléma minden olyan formulára, melyben csak egy argumentumú függvények szerepelnek¹⁰.

PEPISnek viszont¹¹ az egzisztenciális quantorok számát sikerült lecsökkentenie egyetlen egyre. Pontosabban: minden \mathfrak{A} formulához készít egy vele egyenértékű

$$\mathfrak{B} = (x_1)(x_2)(\mathbf{E}y)B_1 \& (x_3)(x_4)\dots(x_n)B_2 \quad (6)$$

alakú zárt formulát, mely azután átalakítható

$$(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)\dots(x_n)(\mathbf{E}y)(B_1 \& B_2) \quad (7)$$

alakba, de

$$(x_1)(x_2)(\mathbf{E}y)(x_3)(x_4)\dots(x_n)(B_1 \& B_2) \quad (8)$$

alakba is.

Ezzel párhuzamba állítható, hogy megoldható az eldöntés-probléma minden olyan formulára, melyben minden egzisztenciális quantor megelőz minden általánosat¹², tehát többek közt mindazokra, amelyeknek praefixuma csupán általános quantorokból áll.

A praefixumot egyszerűsítő eddig ismert redukciós tételek egyike sem olyan, hogy mindkét fajta quantorok számát csökkentené. Dolgozatom első tétele egy ilyen irányú redukciót tartalmaz. Megmutatom ugyanis, hogy minden \mathfrak{A} formula egyenértékű egy

⁹ K. GÖDEL, Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, 2 (1932), 27—28. l.; L. KALMÁR, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählansdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Annalen*, 108 (1933), 466—484. l.; K. SCHÜTTE, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, 109 (1934), 572—603. l.; Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln, *Math. Annalen*, 110 (1935), 161—194. l.

¹⁰ D. HILBERT—P. BERNAYS, 7, 190—199. l.

¹¹ J. PEPIS, Ein Verfahren der mathematischen Logik, *Journal of Symbolic Logic*, 3 (1938), 61—76. l.; Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Fundamenta Math.*, 30 (1938), 257—348. l.

¹² P. BERNAYS—M. SCHÖNFINKEL, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, 99 (1928), 342—372., különösen 359—360. l.

$$\mathfrak{B} = (x_1)(x_2)(\mathbf{E}y)B_1 \& (x_1)(x_2)(x_3)B_2 = \begin{cases} (x_1)(x_2)(x_3)(\mathbf{E}y)(B_1 \& B_2), \\ \text{vagy} \\ (x_1)(x_2)(\mathbf{E}y)(x_3)(B_1 \& B_2) \end{cases}$$

alakú zárt binaer formulával. Ezzel PEPIS mindkét eredményét az $n=3$ esetre és binaer formulára redukáltam, de az első alak GÖDEL eredményét is tartalmazza élesített formában. Eljárásom más, egyszerűbbnek látszó gondolatokon alapul, mint PEPISÉ. A mellett valószínűleg tovább nem is élesíthető, mert a rövidebb praefixumok közül már csak a $(x)(\mathbf{E}y)(z)$ típusúval bíró praenex formulákra nincs általánosan megoldva az eldöntés-probléma, de valószínűbb, hogy erre is megoldható, mint az, hogy ez már az általános eldöntés-problémát magába foglalná.

A második tételben PEPIS (7) alatti eredményét élesítem egy másik irányban, megmutatva, hogy ez a formulatípus elérhető úgy is, hogy a magkifejezésben csak egyetlen, és pedig két argumentumú függvényváltozó szerepeljen. Ez a bizonyítás mutat valami rokonságot az eredeti PEPIS-féle gondolattal, de annak aritmetikai módszerét könnyebben kezelhető halmazelméleti eszközökkel helyettesítem.

4. I. tétel. Minden \mathfrak{A} formula egyenértékű egy

$$\mathfrak{B} = (x_1)(x_2)(\mathbf{E}y)B_1 \& (x_1)(x_2)(x_3)B_2 \quad (9)$$

alakú zárt, binaer formulával. \mathfrak{B} átrendezhető mind

$$(x_1)(x_2)(x_3)(\mathbf{E}y)B, \quad (9')$$

mind pedig

$$(x_1)(x_2)(\mathbf{E}y)(x_3)B \quad (9'')$$

alakba, ahol

$$B = B_1 \& B_2.$$

Bizonyítás: GÖDEL tételét felhasználva feltehetjük¹³, hogy \mathfrak{A}

$$(x_1)(x_2)(x_3)(\mathbf{E}y_1)(\mathbf{E}y_2)\dots(\mathbf{E}y_n)A(F_1, F_2, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

¹³ Csak az egyszerűbb írásmód kedvéért indulok ki a GÖDEL-féle eredményből. Minden változtatás nélkül alkalmazható az eljárás a gyengébb SKOLEM-féle eredményből kiindulva is és akkor a GÖDEL-féle tételnek is egy újabb, egyszerűbb bizonyítását kapjuk.

alakú, ahol F_1, F_2, \dots, F_l két argumentumú függvényváltozók. Az A magkifejezés elemi logikai függvénye az összes

$$F_\lambda(x_\mu, x_{\mu'}), F_\lambda(x_\mu, y_\nu), F_\lambda(y_\nu, x_\mu), F_\lambda(y_\nu, y_{\nu'})$$

alakú kifejezéseknek (vagy egy részüknek):

$$\begin{aligned} A(F_1, F_2, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ = \mathbf{L}[F_\lambda(x_\mu, x_{\mu'}), F_\lambda(x_\mu, y_\nu), F_\lambda(y_\nu, x_\mu), F_\lambda(y_\nu, y_{\nu'})] \quad (10) \\ (\lambda=1, 2, \dots, l; \mu, \mu'=1, 2, 3; \nu, \nu'=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Legyen \mathfrak{A} kielégíthető. Egy kielégíthető formulában egy exisztenciális quantor azt jelenti, hogy az előtte álló általános quantorok változói helyébe bárhogy helyettesítünk elemeket, ezekhez mindig van olyan elem, melyet az exisztenciális quantor változója helyébe írva a formula igaz lesz; tehát minden exisztenciális quantor egy olyan függvényt jellemez, mely bizonyos számú elemhez az individuumtartomány valamely elemét rendeli. Az ilyen függvényt a logikai függvényekkel szemben *matematikai függvénynek* nevezzük. Az exisztenciális quantorok tehát egy-egy annyi változós matematikai függvényt jellemeznek, ahány általános quantor megelőzi őket.

Hogy \mathfrak{A} kielégíthető egy \mathfrak{S} individuumtartományon, az tehát azt jelenti, hogy vannak oly F_1, F_2, \dots, F_l \mathfrak{S} -n értelmezett két argumentumú logikai függvények és olyan

$$\eta_1(x_1, x_2, x_3), \eta_2(x_1, x_2, x_3), \dots, \eta_n(x_1, x_2, x_3)$$

matematikai függvények, hogy

$$A(F_1, F_2, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, \eta_1(x_1, x_2, x_3), \eta_2(x_1, x_2, x_3), \dots, \eta_n(x_1, x_2, x_3))$$

minden x_1, x_2, x_3 elemre igaz. Az alapgondolat most a következő. Új individuumtartományt képezünk, az \mathfrak{S} elemeiből képezett rendezett hármasok és rendezett n -esek halmazát: $\mathfrak{S}^3 + \mathfrak{S}^n$. Jellemezzük \mathfrak{S}^3 -t és \mathfrak{S}^n -et két logikai függvénynel:

$$I_3(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}^3, \\ \text{különb} \downarrow & \end{cases} \quad I_n(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}^n, \\ \text{különb} \downarrow & \end{cases}$$

Legyen x az (x_1, x_2, x_3) hármas, y az (y_1, y_2, \dots, y_n) n -es, akkor egy ilyen reláció, hogy $F_\lambda(x_\mu, x_{\mu'})$, vagy $F_\lambda(x_\mu, y_\nu)$, vagy $F_\lambda(y_\nu, y_{\nu'})$, vagy $F_\nu(y_\nu, y_{\nu'})$ egy-egy újabb relációt jelent x és x , x és y , y és x , ill. y és y között, éspedig más és más relá-

ciót a szerint, hogy az argumentumokba helyettesített sorozatok hányadik elemeiről van szó. Így F_1, F_2, \dots, F_l helyett most $l \cdot n^2$ számú új logikai függvényt kapunk. Jelöljük ezeket $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ -nal ($\lambda = 1, 2, \dots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$). Ha x és y három-, vagy n -tagú sorozatok, akkor $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ egyezzen meg F_λ értékével, az x μ -edik és az y ν -edik elemét téve az első, ill. második argumentumába, feltéve, hogy ezek az elemek léteznek (azaz, ha x , ill. y háromtagú sorozat, akkor $\mu \leq 3$, ill. $\nu \leq 3$); különben legyen $G_{\lambda\mu\nu}(x, y) = \downarrow$. μ -t az első, ν -t a második argumentum *indexének* fogjuk nevezni. Ekkor \mathfrak{A} -nak az új individuumtartományon megfelel a következő formula¹⁴:

$$(x)(Ey)(I_3(x) \rightarrow \rightarrow I_n(y) \mathbf{L}[G_{\lambda\mu\mu}(x, x), G_{\lambda\mu\nu}(x, y), G_{\lambda\nu\mu}(y, x), G_{\lambda\nu\nu}(y, y)]). \quad (11)$$

Azonban azt is el akarjuk érni, hogy a készítendő új formula kielégíthetőségéből visszafelé következzen \mathfrak{A} kielégíthetősége is. Ehhez egyrészt az kell, hogy az új individuumtartományból rekonstruálhassuk a régít; ezt legegyszerűbben úgy érhetjük el, hogy $\mathfrak{S}^3 + \mathfrak{S}^n$ helyett $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^3 + \mathfrak{S}^n$ -t tekintjük új individuumtartománynak és \mathfrak{S} elemeit egy újabb logikai függvénnel jellemezzük:

$$I_1(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}, \\ \text{különben } \downarrow. \end{cases}$$

Másrészt azt kell további formulákkal kifejeznünk, hogy \mathfrak{S} bármely három elemét összetehetjük egy x hármassá, és bármely y n -est (így többek közt a (11) alapján az x -hez tartozót is) szétbonthatjuk n \mathfrak{S} -hez tartozó elemre. Ezek az állítások azonban három általános után egy egzisztenciális, illetőleg egy általános után n egzisztenciális quantorral írhatók fel, arra pedig, hogy formuláinkat egy (9) alakú formulában egyesíthetjük, csak akkor lehet reményünk, ha praefixumaik nem bonyolultabbak mint (9) első, vagy mint (9) második konjunkciós tagjái. Ezt elérhetjük úgy, hogy hozzávesszük az új individuumtartományhoz az \mathfrak{S}

¹⁴ A továbbiakban a konjunkció jelét nem írjuk ki, vagy ponttal helyettesítjük; több tényezős konjunkció jelölésére a Π jelet használjuk és zárójelek megtakarítására megegyezünk abban, hogy az implikáció «erősebben választ szét», mint a konjunkció, vagyis egy $XY \rightarrow ZU$ implikáció a lehetséges zárójelzések közül mindig $(XY) \rightarrow (ZU)$ -t jelentse.

n -nél kevesebb eleméből álló összes rendezett sorozatot. Így az új individuumtartomány

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}^2 + \mathfrak{S}^3 + \dots + \mathfrak{S}^n.$$

Az összeg egyes tagjainak jellemzésére bevezetjük a következő egyváltozós függvényeket:

$$I_1(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}, \\ \text{különben } \downarrow; \end{cases}$$

$$I_2(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}^2, \\ \text{különben } \downarrow; \end{cases} \quad \dots \quad I_{n-1}(x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}^{n-1}, \\ \text{különben } \downarrow. \end{cases}$$

\mathfrak{S}^n ekkor azon elemek összessége, melyekre ezek egyike sem áll, tehát a fentebb bevezetett $I_n(x)$ függvény feleslegessé válik, helyettesíthető a következő konjunkcióval, melyet a továbbiakban is $I_n(x)$ -szel fogunk rövidíteni:

$$I_n(x) = \bar{I}_1(x) \bar{I}_2(x) \dots \bar{I}_{n-1}(x).$$

A $G_{\lambda\mu\nu}$ függvények értelmezését kiterjeszthetjük az újonnan bevezetett sorozatokra is az eddigi értelmezéshez hasonlóan:

$$G_{\lambda\mu\nu}(x, y) = \begin{cases} F_\lambda(x_\mu, y_\nu), & \text{ha } x \in \mathfrak{S}^i, y \in \mathfrak{S}^j \text{ } (i \geq \mu, j \geq \nu), \text{ azaz} \\ & x = (x_1, x_2, \dots, x_i), y = (y_1, y_2, \dots, y_j), \\ & x_1, x_2, \dots, x_i, y_1, y_2, \dots, y_j \in \mathfrak{S}, \\ \text{különben } \downarrow \end{cases}$$

($\lambda = 1, 2, \dots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$).

Ezekén kívül szükségünk lesz még két relációra: hogy egy sorozat egy eggyel hosszabból az utolsó elem elhagyásával keletkezik és hogy egy elem egy elemsorozat utolsó eleme:

$$R_1(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}^{v-1}, y \in \mathfrak{S}^v, \text{ azaz } y = (y_1, y_2, \dots, y_v), \\ & y_1, y_2, \dots, y_v \in \mathfrak{S} \text{ és } x = (y_1, y_2, \dots, y_{v-1}) \quad (v=2, \dots, n), \\ \text{különben } \downarrow; \end{cases}$$

$$R_2(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x \in \mathfrak{S}, y \in \mathfrak{S}^v, \text{ azaz } y = (y_1, y_2, \dots, y_v), \\ & y_1, y_2, \dots, y_v \in \mathfrak{S} \text{ és } x = y_v \quad (v=2, \dots, n), \\ \text{különben } \downarrow. \end{cases}$$

Hogy \mathfrak{S} bármely három x_1, x_2, x_3 eleméhez van egy belőlük alkotott hármas, azt úgy fejezhetjük ki, hogy két elemből alkotható pár, egy párból és egy elemből pedig hármas:

$$(x_1)(x_2)(\mathbf{E}p)(I_1(x_1)I_1(x_2) \rightarrow I_2(p)R_1(x_1, p)R_2(x_2, p)), \quad (12)$$

$$(p)(x_3)(\mathbf{E}q)(I_2(p)I_1(x_3) \rightarrow I_3(q)R_1(p, q)R_2(x_3, q)). \quad (13)$$

Egy n -esből pedig úgy kaphatjuk vissza elemeit, hogy szétválasztjuk az utolsó elemét és a megmaradó sorozatot és ezt ismétljük, míg az első elemig nem érünk. Ezt lehetővé teszik a következő formulák:

$$(s)(\mathbf{E}t)(I_1(s) \rightarrow I_{v-1}(t)R_1(t, s)) \quad (v=2, \dots, n), \quad (14)$$

$$(s)(\mathbf{E}u)(I_v(s) \rightarrow I_1(u)R_2(u, s)) \quad (v=2, \dots, n). \quad (15)$$

A (11)–(15) formulák még mindég három egyváltozós és két kétváltozós matematikai függvényt jellemeznek.

(11)-ből:

$$\eta(x) = \begin{cases} (\eta_1(x_1, x_2, x_3), \eta_2(x_1, x_2, x_3), \dots, \eta_n(x_1, x_2, x_3)) \in \mathfrak{S}^n \\ \text{ha } x \in \mathfrak{S}^3, \text{ azaz } x = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{S}, \\ \text{különben tetszőleges;} \end{cases}$$

(12)-ből:

$$\pi_1(x, y) = \begin{cases} (x, y) \in \mathfrak{S}^2, \text{ ha } x, y \in \mathfrak{S}, \\ \text{különben tetszőleges;} \end{cases}$$

(13)-ből:

$$\pi_2(x, y) = \begin{cases} (x_1, x_2, y) \in \mathfrak{S}^3, \text{ ha } x \in \mathfrak{S}^2, \text{ azaz } x = (x_1, x_2), \\ x_1, x_2 \in \mathfrak{S}, y \in \mathfrak{S}, \\ \text{különben tetszőleges;} \end{cases}$$

(14)-ből:

$$\varrho_1(x) = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_{v-1}) \in \mathfrak{S}^{v-1}, \text{ ha } x \in \mathfrak{S}^v, \text{ azaz } x = (x_1, x_2, \dots, x_v), \\ x_1, x_2, \dots, x_v \in \mathfrak{S} \quad (v=2, \dots, n) \\ \text{különben tetszőleges;} \end{cases}$$

(15)-ből:

$$\varrho_2(x) = \begin{cases} x_v, \text{ ha } x \in \mathfrak{S}^v, \text{ azaz } x = (x_1, x_2, \dots, x_v), \\ x_1, x_2, \dots, x_v \in \mathfrak{S} \quad (v=2, \dots, n) \\ \text{különben tetszőleges.} \end{cases}$$

Mivel azonban a $\pi_1(x, y)$ és $\pi_2(x, y)$ kétváltozós függvények értelmezési tartományának nincs közös része, ezek a függvények könnyen elhelyezhetők egyetlen $\zeta(x, y)$ kétváltozós matematikai függvény értékkészletében, pl. a következőképpen:

$\zeta(x, y)$		$y \in$				
		\mathfrak{I}	\mathfrak{I}^2	\mathfrak{I}^3	\dots	\mathfrak{I}^n
$x \in$	\mathfrak{I}	$\pi_1(x, y)$	$\varrho_1(y)$	$\varrho_1(y)$	\dots	$\varrho_1(y)$
	\mathfrak{I}^2	$\pi_2(x, y)$	$\varrho_2(x)$			
	\mathfrak{I}^3	$\eta(x)$		$\varrho_2(x)$		
	\vdots				\dots	
	\mathfrak{I}^n					$\varrho_2(x)$

Az üresen maradt kockákban jelenthet $\zeta(x, y)$ bármit, pl. \mathfrak{I} -nek egy határozott a elemét. A (11) — (15) formulák helyébe ekkor a következő lép:

$$\begin{aligned}
 & (x)(y)(\mathbf{E}z) \{ (I_3(x)I_1(y) \rightarrow \\
 & \rightarrow I_n(z) [G_{\lambda\mu\nu}(x, x), G_{\lambda\mu\nu}(x, z), G_{\lambda\nu\mu}(z, x), G_{\lambda\nu\nu}(z, z)]) \cdot \\
 & \cdot (I_1(x)I_1(y) \rightarrow I_2(z)R_1(x, z)R_2(y, z)) (I_2(x)I_1(y) \rightarrow I_3(z)R_1(x, z)R_2(y, z)) \cdot \quad (16) \\
 & \cdot \prod_{\nu=2}^n (I_1(x)I_\nu(y) \rightarrow I_{\nu-1}(z)R_1(z, y)) \cdot \prod_{\nu=2}^n (I_\nu(x)I_\nu(y) \rightarrow I_1(z)R_2(z, x)) \}.
 \end{aligned}$$

Jelöljük ennek magkifejezését B_1 -gyel.

Végül még azt kell kifejezésre juttatnunk, hogy az egy meghatározott λ -hoz tartozó összes $G_{\lambda\mu\nu}$ függvények ugyanabból az F_λ -ból keletkeztek, hogy így a G -kből rekonstruálni tudjuk majd az F -eket. Ez pl. úgy történhetik, hogy felírjuk, hogy minden sorozat helyettesíthető az utolsó elemének elhagyásakor megmaradó szeletével az összes olyan argumentumokban, melyeknek indexe nem nagyobb a maradéksorozat hosszánál, továbbá, hogy egy ν hosszúságú sorozat, ha ν indexű argumentumban áll, helyettesíthető az utolsó elemével, de úgy, hogy egyszersmind az argumentum indexét 1-re változtatjuk. Formulában:

$$\begin{aligned}
 & I_{k-1}(x)I_k(y)R_1(x, y) \rightarrow \\
 & \rightarrow (G_{\lambda\mu\nu}(u, y) \sim G_{\lambda\mu\nu}(u, x)) (G_{\lambda\nu\mu}(y, u) \sim G_{\lambda\nu\mu}(x, u)) \quad (17) \\
 & (\lambda=1, 2, \dots, l; \quad k=2, \dots, n; \quad \mu=1, 2, \dots, n; \quad \nu=1, 2, \dots, k-1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_1(x)I_k(y)R_2(x, y) \rightarrow \\
 & \rightarrow (G_{\lambda\mu k}(u, y) \sim G_{\lambda\mu 1}(u, x)) (G_{\lambda k\mu}(y, u) \sim G_{\lambda 1\mu}(x, u)) \quad (18) \\
 & (\lambda=1, 2, \dots, l; \quad k=2, \dots, n; \quad \mu=1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Jelöljük a (17)-ben és a (18)-ban szereplő összes magkifejezések konjunkcióját B_2 -vel. Ekkor a keresett \mathfrak{B} formula:

$$\mathfrak{B} = (x)(y)(\mathbf{E}z)B_1 \cdot (x)(y)(u)B_2.$$

Ez valóban (9) alakú és keletkezéséből világos, hogy kielégíthető, ha \mathfrak{M} kielégíthető.

5. Legyen most \mathfrak{B} kielégíthető egy \mathfrak{Y}' individuumtartományon; ekkor választhatók a benne szereplő logikai függvények úgy, hogy (16), (17) és (18) igaz legyen. Ha (16) igaz, akkor x és y bármely és z egy-egy alkalmas választása mellett még inkább igazak lesznek a benne szereplő konjunkció egyes tagjai, tehát — a változókat más betűkkel jelölve némely helyen — (12) és (13), továbbá

$$(x)(x')(\mathbf{E}y)(I_3(x)I_1(x') \rightarrow \rightarrow I_n(y)\mathbf{L}[G_{\lambda\mu\nu}(x, x), G_{\lambda\mu\nu}(x, y), G_{\lambda\nu\mu}(y, x), G_{\lambda\nu\nu}(y, y)]), \quad (11')$$

$$(x_1)(s)(\mathbf{E}z)(I_1(x_1)I_r(s) \rightarrow I_{r-1}(z)R_1(z, s)) \quad (r=2, \dots, n), \quad (14')$$

$$(s)(s')(\mathbf{E}t)(I_r(s)I_r(s') \rightarrow I_1(t)R_2(t, s)) \quad (r=2, \dots, n) \quad (15')$$

igaz lesz. Ezek öt kétváltozós matematikai függvényt jellemeznek. A fenti sorrendben így jelöljük őket:

$$p = \pi_1(x_1, x_2), \quad q = \pi_2(p, x_3), \quad y = \eta(x, x'), \quad z = \varrho_1(x_1, s), \quad t = \varrho_2(s, s').$$

Először is megmutatjuk, hogy van \mathfrak{Y}' -nek olyan b eleme, melyre $I_1(b)$ igaz. Legyen a' \mathfrak{Y}' -nek egy tetszőleges eleme. Erre

$$I_1(a'), I_2(a'), \dots, I_{n-1}(a'), \quad I_n(a') = \bar{I}_1(a') \bar{I}_2(a') \dots \bar{I}_{n-1}(a')$$

közül egynek igaznak kell lennie, mert az utolsó csak akkor hamis, ha az előzők közt van igaz is. Legyen $I_k(a') = \uparrow$, $1 \leq k \leq n$. Ha $k = 1$, akkor már igazoltuk is állításunkat: $b = a'$. Ha $k > 1$, $b = \varrho_3(a', a')$ -re már (15') szerint, $s = s' = a'$, $\nu = k-t$ írva, $I_1(b) = \uparrow$.

Jelöljük \mathfrak{S}' -vel \mathfrak{Y}' azon x elemeinek halmazát, melyekre $I_1(x)$ igaz. Megmutatjuk, hogy \mathfrak{M} kielégül \mathfrak{S}' -n, ha F_2 -nak a G_{211} -et választjuk.

Legyen x_1, x_2, x_3 \mathfrak{S}' -nek három tetszőleges eleme. Legyen

$$p = \pi_1(x_1, x_2), \quad x = \pi_2(p, x_3).$$

Ekkor (12) és (13) szerint rendre adódik

$$\begin{array}{lll} I_2(p), & R_1(x_1, p), & R_2(x_2, p), \\ I_3(x), & R_1(p, x), & R_2(x_3, x). \end{array} \quad (19)$$

(11')-ből következik $z_n = \eta(x, x_1)$ -re, hogy igaz

$$I_n(z_n) \quad (20)$$

és

$$L[G_{\lambda\mu\mu'}(x, x), G_{\lambda\mu\nu}(x, z_n), G_{\lambda\nu\mu}(z_n, x), G_{\lambda\nu\nu'}(z_n, z_n)]. \quad (21)$$

Legyen

$$z_{n-1} = \varrho_1(x_1, z_n), \dots, z_2 = \varrho_1(x_1, z_3), z_1 = \varrho_1(x_1, z_2);$$

$$y_n = \varrho_2(z_n, z_n), y_{n-1} = \varrho_2(z_{n-1}, z_{n-1}), \dots, y_2 = \varrho_2(z_2, z_2), y_1 = z_1.$$

Ekkor (14') szerint kapjuk, ha s helyett rendre z_n, z_{n-1}, \dots, z_2 -t teszünk, hogy fennáll

$$I_k(z_k) \text{ és } R_1(z_k, z_{k+1}) \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \quad (22)$$

Az y -okra pedig (15')-ből $s = s' = z_k$ ($k=2, \dots, n$) helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$I_1(y_k) \text{ és } R_2(y_k, z_k) \quad (k=2, \dots, n). \quad (23)$$

(22)-ből, mivel $y_1 = z_1$,

$$I_1(y_1) \text{ és } R_1(y_1, z_2). \quad (24)$$

Megmutatjuk, hogy $\lambda = 1, 2, \dots, l$; $\mu, \mu' = 1, 2, 3$; $\nu, \nu' = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$\begin{array}{l} G_{\lambda\mu\mu'}(x, x) \sim G_{\lambda 11}(x_\mu, x_{\mu'}), \\ G_{\lambda\mu\nu}(x, z_n) \sim G_{\lambda 11}(x_\mu, y_\nu), \\ G_{\lambda\nu\mu}(z_n, x) \sim G_{\lambda 11}(y_\nu, x_\mu), \\ G_{\lambda\nu\nu'}(z_n, z_n) \sim G_{\lambda 11}(y_\nu, y_{\nu'}). \end{array} \quad (25)$$

Elég például a második aequivalenciát megmutatni, a többi hasonlóan adódik.

A (17)-ből k helyébe 3 -at, 2 -t, illetve ν' -t téve, a változókat speciálisan választva és az implikáció utótagjának csak egy-egy alkalmas konjunkcióstagját írva fel, adódik $\lambda = 1, 2, \dots, l$; $\mu = 1, 2, 3$; $\nu = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$I_2(p) I_3(x) R_1(p, x) \rightarrow (G_{\lambda 2\nu}(x, z_n) \sim G_{\lambda 2\nu}(p, z_n), \quad (26)$$

$$I_2(p) I_3(x) R_1(p, x) \rightarrow (G_{\lambda 1\nu}(x, z_n) \sim G_{\lambda 1\nu}(p, z_n), \quad (27)$$

$$I_1(x_1) I_2(p) R_1(x_1, p) \rightarrow (G_{\lambda 1\nu}(p, z_n) \sim G_{\lambda 1\nu}(x_1, z_n), \quad (27')$$

$$I_{\nu'-1}(z_{\nu'-1}) I_{\nu'}(z_{\nu'}) R_1(z_{\nu'-1}, z_{\nu'}) \rightarrow (G_{\lambda 1\nu}(x_\mu, z_{\nu'}) \sim G_{\lambda 1\nu}(x_\mu, z_{\nu'-1})). \quad (28)$$

($\nu' = \nu + 1, \dots, n$).

Hasonlóan (18)-ből k helyébe 2-t, 3-at és ν -t téve

$$I_1(x_2) I_2(p) R_2(x_2, p) \rightarrow (G_{\lambda 2\nu}(p, z_n) \sim G_{\lambda 1\nu}(x_2, z_n)), \quad (26')$$

$$I_1(x_3) I_3(x) R_2(x_3, x) \rightarrow (G_{\lambda 3\nu}(x, z_n) \sim G_{\lambda 1\nu}(x_3, z_n)), \quad (29)$$

$$I_1(y_\nu) I_\nu(z_\nu) R_2(y_\nu, z_\nu) \rightarrow (G_{\lambda 1\nu}(x_\mu, z_\nu) \sim G_{\lambda 11}(x_\mu, y_\nu)). \quad (30)$$

Itt az implikációs előtagok (19), (20), (22), (23) és (24) miatt mind igazak, tehát az aequivalencia tranzitív tulajdonsága miatt adódik (27), (27'), ill. (26), (26'), ill. (29)-ből

$$G_{\lambda \mu\nu}(x, z_n) \sim G_{\lambda 1\nu}(x_\mu, z_n),$$

(28)-ből pedig

$$G_{\lambda 1\nu}(x_\mu, z_n) \sim G_{\lambda 1\nu}(x_\mu, z_\nu);$$

ezekből és (30)-ból végül

$$G_{\lambda \mu\nu}(x, z_n) \sim G_{\lambda 11}(x_\mu, y_\nu).$$

A (25) aequivalenciákat felhasználva (21)-ből kapjuk, hogy \mathfrak{S}' bármely három x_1, x_2, x_3 elemére, ha

$$\begin{aligned} p &= \pi_1(x_1, x_2), & x &= \pi_2(p, x_3), \\ z_n &= \eta(x, x_1), & z_\nu &= \varrho_1(x_1, z_{\nu+1}), & (\nu=1, 2, \dots, n-1), \\ y_\nu &= \varrho_2(z_\nu, z_\nu), & y_1 &= z_1, & (\nu=2, \dots, n), \end{aligned}$$

mindig igaz lesz

$$\mathcal{L}[G_{\lambda 11}(x_\mu, x_\mu), G_{\lambda 11}(x_\mu, y_\nu), G_{\lambda 11}(y_\nu, x_\mu), G_{\lambda 11}(y_\nu, y_\nu)]$$

$(\lambda=1, 2, \dots, l; \mu, \mu'=1, 2, 3; \nu, \nu'=1, 2, \dots, n),$

tehát \mathfrak{A} valóban kielégül \mathfrak{S}' -n, ha F_1, F_2, \dots, F_l helyébe a $G_{111}, G_{211}, \dots, G_{l11}$ függvényeket írjuk.

6. II. tétel. Minden formula egyenértékű egy olyan

$$(x_1)(x_2)\dots(x_n)(\mathbf{E}y)C(G; x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

alakú formulával, melynek magkifejezésében csak egy, és pedig kétargumentumú függvényváltozó fordul elő.

Bizonyítás: Az első tétel folytán az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a formula (9), tehát (9'') alakú és binaer:

$$\mathfrak{B} = (x_1)(x_2)(\mathbf{E}x_3)(x_4)B(F_1, F_2, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Ha $l=1$, akkor az első tétel (9') formulája már megfelel a második tétel követelményeinek, tehát feltehetjük, hogy $l>1$.

B elemi logikai függvénye az összes $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ alakú kifejezéseknek:

$$B(F_1, F_2, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{M}[F_\lambda(x_\mu, x_\nu)]$$

($\lambda=1, 2, \dots, l; \mu, \nu=1, 2, 3, 4$).

A bizonyítás néhány máshol is előforduló gondolat alkalmas kombinálásával sikerül.

A logikai függvényeket úgy lehet egy kétváltozósba beolvasztani¹⁵, hogy a régi individuumtartományhoz hozzá vesszük az elemeiből alkotott rendezett párokat. Ezen az individuumtartományon a régi függvények egyváltozósokkal helyettesíthetők, s így beolvaszthatók egy kétváltozós függvénybe, például ha hozzá vesszünk az individuumtartományhoz még annyi újabb elemet, ahány függvényünk volt; ezeket tesszük az egyik argumentumhelyre, a másikkra a régi függvény két argumentumából alkotott párt, s az új függvényhez ezen a helyen a régi függvény értékét rendeljük.

Szükségessé válik azonban még különböző újabb, az új individuumtartományon kétváltozós függvények bevezetése is, melyek természete attól függ, hogy milyen egyéb tulajdonságot akarunk kifejezni az új formulával. Ezekkel jellemezzük az új individuumtartomány szerkezetét.

Ezek is elhelyezhetők azonban ugyanannak a kétváltozós függvénynek az értékkészletében, ha elég őket az új individuumtartománynak csak egy-egy részén értelmezni és ezeknek a részhalmazoknak nincs közös részük.

A függvényeket képviselő elemek létezését például az egész formula elé írt egzisztenciális quantorokkal biztosíthatnánk, de

¹⁵ Ez az eljárás általánosan használatos a függvények számának csökkentésére. Lásd pl. L. KALMÁR, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Verhandlungen des Intern. Math.-Kongr. Zürich* 1932, II, 337. l.; Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen, *Compositio Math.*, 4 (1936), 137—144. l.; Th. SKOLEM, Einige Reduktionen des Entscheidungsproblems, *Vid. Akad. Avh., Oslo*, I. Mat. Nat. Kl., 1936, No. 6.; L. KALMÁR, Zur Reduktion des Entscheidungsproblems, *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 19 (1937) 121—130. l.; On the Reduction of the Decision Problem, First Paper, *Journal of Symbolic Logic*, 4 (1939), 1—9. l.

ha sikerül őket egy függvénykapcsolattal egyértelműen jellemezni¹⁶, akkor lehet ezeket az egzisztenciális quantorokat is az általánosak után tenni. Most ezt a gondolatot úgy kell módosítani, hogy mindez elférjen egyetlen matematikai függvényben. Ehhez szükségessé vált, hogy a matematikai függvény változóinak számát, vagyis az egzisztenciális quantort megelőző általánosakét, háromra növeljük.

Hogy az újabb elemek létezése mellett a régi egzisztenciális quantor is beleférjen egyetlen új egzisztenciális quantorba, azt PERIS egy gondolatának segítségével fogjuk elérni. Ez abban áll, hogy az eredetileg adott formulát egy csupa általános quantorból álló praefixumú implikációval fejezi ki, az előtagban szereplő elemek létezését pedig egy külön formulában követeli meg, mely csak egy egzisztenciális quantort tartalmaz.

Legyen \mathfrak{B} kielégíthető egy \mathfrak{S} individuumtartományon. Legyenek F_1, F_2, \dots, F_l olyan \mathfrak{S} -n értelmezett kétargumentumú logikai függvények és $\xi(x_1, x_2)$ olyan matematikai függvény, melyekre

$$B(F_1, F_2, \dots, F_l; x_1, x_2, \xi(x_1, x_2), x_4) = \uparrow,$$

valahányszor x_1, x_2 és x_4 \mathfrak{S} három tetszőleges eleme. Feltessük, hogy \mathfrak{S} -nek van legalább két különböző eleme, mert ha \mathfrak{S} eredetileg egyelemű, akkor hozzávehetünk egy újabb elemet, melyre F_1, F_2, \dots, F_l -et és ξ -t úgy értelmezzük, hogy az új elem mindenütt helyettesíthető legyen a régivel. Legyen tehát $a \neq b$ \mathfrak{S} két különböző eleme.

Új individuumtartománynak egy az \mathfrak{S} elemeiből, rendezett párjaiból (\mathfrak{S}^2) és további $l+1$ egymástól és az előzőktől különböző $f_0, f_1, f_2, \dots, f_l$ elemből¹⁷ álló halmazt vezetünk be:

$$\mathfrak{V} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_l\} + \mathfrak{S} + \mathfrak{S}^2 = \mathfrak{F} + \mathfrak{S} + \mathfrak{S}^2,$$

ahol $\mathfrak{F} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_l\}$.

A bevezetendő kétváltozós $G(x, y)$ függvénnyel jellemeznünk kell külön-külön \mathfrak{F} , \mathfrak{S} és \mathfrak{S}^2 elemeit és ki kell tudnunk fejezni

¹⁶ Ez a KALMÁRTól eredő gondolat KALMÁR és SURÁNYI egy az *Acta Sci. Math.*-ban megjelenendő közös cikkében szerepel először.

¹⁷ f_0 -ra azért van szükségünk, hogy az f -eket, továbbá \mathfrak{S} és \mathfrak{S}^2 elemeit jellemezzük vele.

a régi függvényeken kívül a következő relációkat: ha $x \in \mathfrak{J}$, $y \in \mathfrak{J}^2$, akkor 1) x első eleme, 2) x második eleme y -nak, 3) ha $y = (y', y'')$, $y', y'' \in \mathfrak{J}$, akkor $x = \xi(y', y'')$.

\mathfrak{J} jellemzésére egyrészt f_0 -t jellemezzük önállóan azzal, hogy $G(x, x)$ akkor, és csak akkor legyen igaz, ha $x = f_0$. A többi egyrészt közösen jellemezzük f_0 segítségével: $G(x, f_0)$ legyen \uparrow , ha $x \in \mathfrak{J}$, különben \downarrow . Másrészt külön-külön is jellemezzük \mathfrak{J} elemeit azáltal, hogy $G(f_\lambda, f_x) = \uparrow$, ha $x = \lambda + 1$, továbbá ha $\lambda = l$, $x = 1$ ¹⁸, különben \downarrow . \mathfrak{J} és \mathfrak{J}^2 jellemzésére szintén f_0 -t használjuk: $G(f_0, x)$ legyen \uparrow , ha $x \in \mathfrak{J}$, \downarrow , ha $x \in \mathfrak{J}^2$. Mivel az f -eket már jellemeztük, ezek segítségével \mathfrak{J} -t és \mathfrak{J}^2 -et is egyértelműen jellemezhetjük. Az F_1, F_2, \dots, F_l függvények értékészletén akkor fut át $G(x, y)$ értéke, mikor $x = f_1, f_2, \dots, f_l$, y pedig pár. A «pár első eleme» és «pár második eleme» relációkhoz fel kell használnunk azokat az argumentumokat, melyekben az egyik helyen elem, a másikon pár áll. Ekkor azonban azt, hogy egy elem egy pár két eleméhez a ξ függvény által rendelt elem, G értékészletének csak abban a részében helyezhetjük el, ahol mindkét argumentumhelyen pár áll, például úgy, hogy az egyik pár első eleme tegyen eleget ennek a követelménynek. Ez azonban nem okoz bajt, mert azt viszont már ki tudjuk fejezni G -vel, hogy egy elem egy párnak első eleme. Ügyelnünk kell közben arra is, hogy $G(x, x)$ párokra is \downarrow maradjon. Ezeknek megfelelően G értékészletét a következő táblázat tünteti fel pontosan:

$G(x, y)$	$y = f_x$ $x = 0, 1, 2, \dots, l$	$y \in \mathfrak{J}$	$y = (y', y'') \in \mathfrak{J}^2$
$x = f_\lambda$ $\lambda = 0, 1, 2, \dots, l$	$(x=0) \vee (x=\lambda+1) \vee$ $\vee (x=1) \cdot (\lambda=l)$	$\lambda = 0$	$(\lambda \neq 0) \cdot F_\lambda(y', y'')$
$x \in \mathfrak{J}$	\downarrow	\downarrow	$x = y'$
$x = (x', x'') \in \mathfrak{J}^2$	\downarrow	$y = x''$	$(y' = \xi(x', x'')) \cdot$ $(y'' \neq x'')$

¹⁸ Erre azért van szükség, hogy mikor az f -ek létezését kívánjuk meg, f_l -hez is tartozzék egy elem, de ne újabb, hanem f_1 . Mivel $l > 1$, ez a definíció nem mond ellent az előzőnek.

$G(x, y)$ logikai értéke minden argumentumra megegyezik a megfelelő kockában álló kifejezés logikai értékével.

G segítségével ekkor a következőket tudjuk kifejezni:

$$G(x, x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } x = f_0, \\ \downarrow, & \text{ha } x \neq f_0; \end{cases}$$

$$\Phi(u_0, x) = G(u_0, u_0) G(x, u_0) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_0 = f_0, \quad x \in \mathfrak{F}, \\ \text{különb en } \downarrow; \end{cases}$$

$$I_1(u_0, x) = G(u_0, u_0) \bar{G}(x, u_0) G(u_0, x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_0 = f_0, \quad x \in \mathfrak{F}, \\ \text{különb en } \downarrow; \end{cases}$$

$$I_2(u_0, x) = G(u_0, u_0) \bar{G}(x, u_0) \bar{G}(u_0, x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_0 = f_0, \quad x \in \mathfrak{F}^2, \\ \text{különb en } \downarrow; \end{cases}$$

$$R_1(u_0, x, y) = I_1(u_0, x) I_2(u_0, y) G(x, y) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_0 = f_0, \quad x \in \mathfrak{F}, \quad y \in \mathfrak{F}^2, \\ & \text{azaz } y = (y', y''), \quad y', y'' \in \mathfrak{F} \\ & \text{és } x = y', \\ \text{különb en } \downarrow; \end{cases}$$

$$R_2(u_0, x, y) = I_1(u_0, x) I_2(u_0, y) G(y, x) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_0 = f_0, \quad x \in \mathfrak{F}, \quad y \in \mathfrak{F}^2, \\ & \text{azaz } y = (y', y''), \quad y', y'' \in \mathfrak{F} \\ & \text{és } x = y'', \\ \text{különb en } \downarrow; \end{cases}$$

$$P(u_0, x, y, z) = R_1(u_0, x, z) R_2(u_0, y, z) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_0 = f_0, \quad x, y \in \mathfrak{F}, \quad z \in \mathfrak{F}^2 \\ & \text{és } z = (x, y), \\ \text{különb en } \downarrow; \end{cases}$$

$$S(u_0, x, y, p, q, z) = P(u_0, x, y, p) G(p, q) R_1(u_0, z, q) = \\ = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_0 = f_0, \quad x, y, z \in \mathfrak{F}, \quad p, q \in \mathfrak{F}^2, \quad p = (x, y) \text{ és} \\ & q = (z, q''), \text{ ahol } q'' \in \mathfrak{F}, \quad z = \xi(x, y), \quad q'' \neq y, \\ \text{különb en } \downarrow; \end{cases}$$

$$\Psi(u_0, u_1, u_2, \dots, u_l) = G(u_0, u_0) \prod_{\lambda=1}^n \Phi(u_0, u_\lambda) \bar{G}(u_\lambda, u_\lambda) G(u_{\lambda-1}, u_\lambda) = \\ = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha } u_\lambda = f_\lambda \quad (\lambda=0, 1, 2, \dots, l), \\ \text{különb en } \downarrow. \end{cases}$$

Ekkor \mathfrak{B} -nek az új individuumtartományon megfelelő formula:

$$(u_0)(u_1)(u_2)\dots(u_l)(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(p_{11})\dots(p_{44})(q) \\ \left\{ \Psi(u_0, u_1, u_2, \dots, u_l) S(u_0, x_1, x_2, p_{12}, q, x_3) \cdot \right. \\ \left. \cdot \prod_{\mu, \nu=1}^4 P(u_0, x_\mu, x_\nu, p_{\mu\nu}) \rightarrow \mathbf{M}[G(u_i, p_{\mu\nu})] \right\}. \quad (31)$$

Jelöljük a magkifejezést C_1 -gyel.

Ahhoz, hogy a készitendő új formula kielégíthetőségéből következzenek \mathfrak{B} -é is, szükséges még azt is biztosítani, hogy *legyenek* olyan elemek, melyek az implikáció előtagjában szereplő feltételeknek eleget tesznek. Ezt egy háromváltozós $\gamma(u_0, x_1, x_2)$ matematikai függvény segítségével érhetjük el. γ -nak elő kell állítania valahol $f_0, f_1, f_2, \dots, f_l$ -et, ki kell tudnunk fejezni vele, hogy \mathfrak{S} nem üres, tehát elő kell állítania valahol \mathfrak{S} -nek egy elemét, mondjuk a -t; két elemhez elő kell állítania a belőlük alkotott párt, párhoz viszont az első elemét (erre szükségünk van, hogy biztosíthassuk az $S(u_0, x, y, p, q, z)$ relációnak eleget tevő z elem létezését), végül minden $p = (p', p'')$ párhoz egy olyan $q = (q', q'')$ párt, melyre $q' = \xi(p', p'')$ és $q'' \neq p''$; legyen például $q'' = a$, ha $p'' \neq a$, $q'' = b$, ha $p'' = a$. (A p'' -höz így meghatározott elemet jelöljük p'' -sal.) Ennek megfelelően legyen:

$$\gamma(u_0, x_1, x_2) = \begin{cases} f_0, & \text{ha } u_0 \neq f_0 \\ f_{l+1}, & \text{ha } x_1 = f_0, x_2 = f_l \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, l-1), \\ f_1, & \text{ha } x_1 = f_0, x_2 = f_l, \\ a \in \mathfrak{S}, & \text{ha } x_1 \in \mathfrak{S}, x_1 \neq f_0, \\ (x_1, x_2) \in \mathfrak{S}^2, & \text{ha } x_1, x_2 \in \mathfrak{S}, \\ x'_2, & \text{ha } x_1 = f_0, x_2 \in \mathfrak{S}^2, \text{ azaz } x_2 = (x'_2, x''_2), x'_2, x''_2 \in \mathfrak{S}, \\ (\xi(x'_1, x''_1), x''_1) \in \mathfrak{S}^2, & \text{ha } x_1 \in \mathfrak{S}^2, \text{ azaz } x_1 = (x'_1, x''_1), \\ & x'_1, x''_1 \in \mathfrak{S} \text{ és } x_2 = f_0, \\ a & \text{a többi esetekben.} \end{cases}$$

$y = \gamma(u_0, x_1, x_2)$ tehát kielégíti a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} \bar{G}(u_0, u_0) &\rightarrow G(y, y), \\ G(u_0, u_0) G(x_1, x_1) \Phi(u_0, x_2) &\rightarrow \Phi(u_0, y) \bar{G}(y, y) G(x_2, y), \\ G(u_0, u_0) \bar{G}(x_1, x_1) \Phi(u_0, x_1) &\rightarrow I_1(u_0, y), \\ G(u_0, u_0) I_1(u_0, x_1) I_1(u_0, x_2) &\rightarrow P(u_0, x_1, x_2, y), \\ G(u_0, u_0) I_2(u_0, x_1) G(x_2, x_2) &\rightarrow I_2(u_0, y) G(x_1, y), \\ G(u_0, u_0) G(x_1, x_1) I_2(u_0, x_2) &\rightarrow R_1(u_0, y, x_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Ezek konjunkcióját jelöljük C_2 -vel, ekkor a

$$\mathfrak{C} = (u_0)(u_1)(u_2)\dots(u_l)(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(p_{11})\dots(p_{44})(q)C_1 \cdot \\ \cdot (u_0)(x_1)(x_2)(Ey)C_2$$

formulának megvannak a tételben mondott tulajdonságai.

\mathfrak{C} származtatásából nyilvánvaló, hogy kielégíthető, ha \mathfrak{B} kielégíthető.

7. Legyen megfordítva \mathfrak{C} kielégíthető egy \mathfrak{Y}' individuum-tartományon. Legyen $G(x, y)$ egy olyan \mathfrak{Y}' -n definiált kétargumentumú logikai függvény, mely \mathfrak{C} -t kielégíti. Ekkor \mathfrak{Y}' -n G -vel kielégül (31) is, továbbá van egy olyan $\eta(u_0, x_1, x_2)$ matematikai függvény, melyet y helyébe írva a (32) kifejezésekben, mindig \uparrow lesz azok logikai értéke.

Legyen c \mathfrak{Y}' -nek egy tetszőleges eleme. Ha $G(c, c) = \uparrow$ akkor legyen $f_0 = c$. Ha $G(c, c) = \downarrow$, akkor legyen $f_0 = \eta(c, c, c)$; ekkor (32, 1) folytán¹⁹ ismét következik, hogy $G(f_0, f_0) = \uparrow$. Tehát mindkét esetben igaz

$$G(f_0, f_0). \quad (33)$$

Legyen $f_\lambda = \eta(f_0, f_0, f_{\lambda-1})$ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$). Ekkor (32, 2)-ből (33) folytán teljes indukcióval adódik, hogy igaz

$$\Psi(f_0, f_\lambda) \bar{G}(f_\lambda, f_\lambda) G(f_{\lambda-1}, f_\lambda) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l), \quad (34)$$

tehát $\Psi(u_0, u_1, u_2, \dots, u_l)$ értelmezése szerint

$$\Psi(f_0, f_1, f_2, \dots, f_l) \quad (35)$$

is. \mathfrak{S}' jelentse \mathfrak{Y}' azon x elemeinek halmazát, melyekre $I_1(f_0, x) = \uparrow$. \mathfrak{S}' nem üres, mert $a = \eta(f_0, f_1, f_0)$ -ra (32, 3)-ból (33) és (34) folytán következik, hogy $I_1(f_0, a) = \uparrow$. Legyen x_1 és x_2 \mathfrak{S}' két tetszőleges eleme, legyen $p_{12} = \eta(f_0, x_1, x_2)$; ekkor (32, 4)-ből (33) és \mathfrak{S}' értelmezése folytán

$$P(f_0, x_1, x_2, p_{12}) \quad (36)$$

és P értelmezése szerint

$$I_2(f_0, p_{12}) \quad (37)$$

¹⁹ Így jelölöm a (32) alatti első kifejezésre való hivatkozást. Hasonló jelölésekkel fogok hivatkozni a többi kifejezésekre, valamint alább a (38) alatti kifejezésekre is.

is igaz. Legyen $q = \gamma(f_0, p_{12}, f_0)$. (32, 5)-ből (33) és (37) folytán következik, hogy igaz

$$I_2(f_0, q), \quad G(p_{12}, q). \quad (38)$$

Legyen $x_3 = \gamma(f_0, f_0, q)$, akkor (32, 6)-ból és (38, 1) folytán következik, hogy

$$R_1(f_0, x_3, q) \quad (39)$$

és R_1 értelmezéséből, hogy

$$I_1(f_0, x_3) \quad (40)$$

igaz. S értelmezése folytán (36), (38, 2) és (39)-ből következik, hogy

$$S(f_0, x_1, x_2, p_{12}, q, x_3) \quad (41)$$

igaz. Legyen x_4 \mathfrak{S}' -nek tetszőleges további eleme és legyen

$$p_{\mu\nu} = \gamma(f_0, x_\mu, x_\nu) \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \quad (42)$$

\mathfrak{S}' értelmezése, (33) és (40) folytán (32, 4)-ből következik, hogy

$$P(f_0, x_\mu, x_\nu, p_{\mu\nu}) \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (42')$$

igaz. Írjunk (31)-ben $u_0, u_1, u_2, \dots, u_l$ helyett $f_0, f_1, f_2, \dots, f_l$ -et, $x_1, x_2, x_3, x_4, p_{11}, \dots, p_{44}, q$ jelentse a fent szerereplő elemeket, akkor az implikáció előtagja igaz (35), (41) és (42') folytán, s így igaz

$$\mathbf{M}[G(f_\lambda, p_{\mu\nu})] \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (43)$$

is. Értelmezzünk végül \mathfrak{S}' -n l kétargumentumú logikai függvényt a következőképpen: ha $x, y \in \mathfrak{S}'$, $p = \gamma(f_0, x, y)$, akkor legyen

$$F_\lambda(x, y) = G(f_\lambda, p) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

Ezeket beírva (43)-ba nyerjük végül (42) folytán, hogy igaz

$$\mathbf{M}[F_\lambda(x_\mu, x_\nu)] \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

Ha tehát \mathfrak{E} kielégíthető egy \mathfrak{Y}' individuumtartományon, akkor a fent megszerkesztett \mathfrak{S}' individuumtartományon kielégíthető \mathfrak{B} is, a változók következő választása mellett: ha x_1, x_2, x_4 \mathfrak{S}' tetszőleges elemei, akkor legyen

$$x_3 = \gamma(f_0, f_0, \gamma(f_0, \gamma(f_0, x_1, x_2), f_0)) = \xi'(x_1, x_2)$$

és \mathfrak{S}' bármely két x, y elemére

$$F_\lambda(x, y) = G(f_\lambda, \gamma(f_0, x, y)) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

© átalakítható

$$(u_0)(u_1)(u_2)\dots(u_l)(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(p_{11})\dots(p_{44})(q)(E y)(C_1 \cdot C_2)$$

alakba, vagy

$$(v_0)(z_1)(z_2)(E y)(u_0)(u_1)(u_2)\dots(u_l)(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(p_{11})\dots(p_{44})(q)(C_1 \cdot C_2)$$

alakba. Előbbi éppen a tételben említett formula, míg az utóbbi a PEPIS-féle (8) típusú formulával analóg, csak az egzisztenciális quantor előtt eggyel több általános quantor áll.

Surányi János.

ZUR REDUKTION DES ENTSCHEIDUNGSPROBLEMS DES LOGISCHEN FUNKTIONENKALKÜLS.

Es werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:

Satz I. *Eine jede Formel des (engeren) Funktionen-kalküls ist hinsichtlich Erfüllbarkeit mit einem pränexen, binären Formel mit einem Präfix der Form*

$$(x_1)(x_2)(x_3)(E y)$$

oder

$$(x_1)(x_2)(E y)(x_3)$$

gleichwertig (also mit einer Formel, die nur vier Quantoren enthält).

Die Grundidee des Beweises ist die folgende: Ist die Ausgangsformel \mathfrak{A} , von der ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden kann, dass sie die Gödelsche Normalform besitzt (also eine binäre Formel ist, deren Präfix genau drei Allzeichen enthält und zwar am Anfang), in einem Individuenbereich \mathfrak{I} erfüllbar, so bilden wir das neue Individuenbereich

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{I} + \mathfrak{I}^2 + \mathfrak{I}^3 + \dots + \mathfrak{I}^n$$

aller Folgen aus Elementen von \mathfrak{I} , die nicht länger sind, als die Anzahl n der Seinszeichen in der Formel \mathfrak{A} . Die alte Relationen $F_\lambda(x, y)$ werden durch je n^2 neue: $G_{\lambda\mu\nu}(x, y)$ ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$) vertreten, deren Wert dann und nur dann \uparrow ist, falls das μ -te Element x_μ von x und das ν -te Element y_ν von y existieren und $F_\lambda(x_\mu, y_\nu) = \uparrow$. Ausserdem führen wir noch die folgenden Prädikate und Relationen ein. $I_\nu(x)$: « x ist eine Folge von der Länge ν »; $R_1(x, y)$: « x ist der vorletzte Abschnitt von y » und $R_2(x, y)$: « x ist letztes Element von y ».

Wir fassen die mit Allzeichen gebundenen Variablen in einem 3-tupel, die mit Seinszeichen gebundenen in einem n -tupel zusammen.

Die Ausgangsformel \mathfrak{A} kann dann durch (11), mit einem einzigen All- und einem Seinszeichen ausgedrückt werden. Die Rückkehr von der zu konstruierenden neuen Formel zu \mathfrak{A} wird ermöglicht, indem durch (12) und (13) zu je drei Elementen x_1, x_2, x_3 von \mathfrak{S} die Existenz des 3-tupels (x_1, x_2, x_3) und durch (14) und (15) die der Elemente jedes n -tupels gesichert wird. Die durch (11)–(15) ausgedrückte Forderung wird dann mit Hilfe der mathematischen Funktion $\zeta(x, y)$ (Seite 62) in der Formel (16), mit einem einzigen Seinszeichen, vereinigt. Die Formeln (17), (18) drücken aus, dass die zu einem bestimmten λ gehörigen Funktionen $G_{\lambda\mu\nu}$ aus demselben F_λ entstammen. Die mit \mathfrak{A} gleichwertige Formel \mathfrak{B} entsteht durch Konjunktion aus den Formeln (16), (17) und (18) (wobei die freien Individuenvariablen der letzteren durch Allzeichen gebunden werden).

Satz II. *Eine jede Formel des logischen Funktionenkalküls ist hinsichtlich Erfüllbarkeit mit einem pränexen Formel mit einem Präfix der Form*

$$(x_1)(x_2) \dots (x_n)(\mathbf{E}y)$$

gleichwertig, die ausserdem nur eine einzige, binäre, Funktionsvariable enthält.

Der Beweisgang ist wie folgt: Die Ausgangsformel \mathfrak{B} sei jetzt die Formel (9'') des Satzes I. Wenn diese in einem Individuenbereich \mathfrak{S} erfüllbar ist, so konstruieren wir den neuen Individuenbereich

$$\mathfrak{Y} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_i\} + \mathfrak{S} + \mathfrak{S}^2$$

und über denselben die binäre Funktion $G(x, y)$ (Seite 68), durch welche ausser den alten Relationen (als Prädikaten von Paaren) und den Relationen «erstes bzw. zweites Element eines Paares» noch die eindeutige Charakterisierung der Elemente und die durch die Ausgangsformel \mathfrak{B} definierte mathematische Funktion ξ ausgedrückt werden kann. Dies ermöglicht \mathfrak{B} in dem neuen Individuenbereich durch (31), also ohne Seinszeichen, auszudrücken. Um die Rückkehr zu \mathfrak{B} zu ermöglichen, wird durch die Konjunktion sämtlicher Formeln (32), durch das Präfix $(u_0)(x_1)(x_2)(\mathbf{E}y)$ gebunden, die Existenz der f_i , eines Elementes von \mathfrak{S} , des Paares (x, y) zu je zwei Elemente x, y von \mathfrak{S} und des ersten Elementes eines Paares gesichert (letzteres wird zur Gewinnung der oben erwähnten mathematischen Funktion verwendet). Die Konjunktion der Formeln (31) und (32) liefert dann die gesuchte, mit \mathfrak{B} gleichwertige Formel \mathfrak{C} , die auch in eine prä-nexe Formel mit dem Präfix

$$(x_1)(x_2)(x_3)(\mathbf{E}y)(x_4) \dots (x_n)$$

umgeformt werden kann.

János Surányi.

EGY WHITNEY-FÉLE GRÁF-TÉTEL ÚJ BIZONYÍTÁSA.

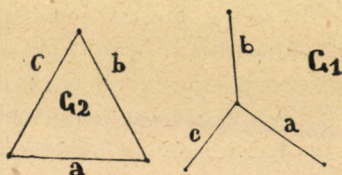
H. WHITNEY¹ bebizonyította, hogy ha két egyszerű gráf úgy rendelhető egymáshoz, hogy egyik gráf egy élének a másik gráf egy éle és összefutó (közös végpontban találkozó) éleknek összefutó élek felelnek meg, akkor — egyetlen kivételtől eltekintve — a két gráf egyenlő. (Itt egyszerű gráfon olyan gráfot értünk, amelyben nincsenek kétszögek.) A kivétel az 1. ábrán látható két gráf.

Jelen dolgozatban ezt a tételt új módszerrel bizonyítjuk be. A továbbiakban a gráfokat mindig összefüggőeknek tételezzük fel.

A módszer lényege egy transzformáció, mellyel egy adott gráfból egy másik gráfot származtatunk, s amelyet az alábbi módon definiálunk. Valamely G gráfhoz rendeljünk egy H gráfot úgy, hogy G minden élének feleljen meg H -ban egy szögpont és két szögpont H -ban akkor és csak akkor legyen összekötve, ha a megfelelő élek G -ben összefutók.

Ilyenkor a H gráfot a G gráf *transzformáltjának*, a műveletet röviden *transzformációnak* nevezzük; jelben: $H = T(G)$.

A transzformáció mindig elvégezhető, a megfordított művelet azonban nem, azaz egy adott gráfhoz, nem mindig található oly gráf, amelynek az adott gráf a transzformáltja. Ha található, akkor az adott gráfot *redukálhatónak*, a műveletet *redukciónak*, az eredményt pedig *redukált* gráfnak nevezzük. (Mert többnyire egyszerűbb szerkezetű, mint az adott gráf.) Jelben: $G = R(H)$.



1. ábra.

¹ H. WHITNEY. Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer. Journ. of Math. **54** (1932). 150.

I. TÉTEL: Valamely gráf redukálhatóságához szükséges és elegendő, hogy teljes gráfokra, mint alkotórészekre bontható úgy, hogy minden szögpontra legfeljebb két alkotórészben és minden él egyetlen alkotórészben szerepeljen.

Itt teljesnek nevezünk egy gráfot, ha bármely két szögpontját összeköti egy (és csak egy) él; ha n szögpontja van, teljes n -szögnek is fogjuk nevezni. A továbbiakban felbontáson mindig az itt definiált felbontást értjük.

Bizonyítás. Az n -ágú csillag transzformáltja nyilván a teljes n -szög. Legyen most adva a G gráf; ennek minden olyan élét, mely nem végződő él, vágjuk ketté valamely belső pontjában. Ezáltal a G csillagokra esik szét úgy, hogy minden él legfeljebb két csillagban, de minden szögpontra csak egy csillagban szerepel. Ezzel egyidejűleg a H gráfban is létesül egy felosztás: az is szét-esik részekre, melyek mindegyike a fenti szerint teljes gráf. Mivel G -ben minden él legfeljebb két csillaghoz tartozhat, azért H egy-egy szögpontja legfeljebb 2 teljes alkotórészhez tartozik. Továbbá a G gráf részeinek, a csillagoknak legfeljebb közös éleik vannak, centrumuk azonban különböző; ezért H -ban a teljes alkotórészeknek legfeljebb közös szögpontjuk van, éleik azonban mind különbözők. Ha tehát a gráf redukálható, akkor valóban lehetséges a felbontás. A feltétel e szerint szükséges. Most bebizonyítjuk, hogy elegendő is.

Legyen adva a H gráf, melyre a felbontás lehetséges; akkor ebből megszerkesztünk egy G gráfot úgy, hogy a H -ban található minden teljes alkotórésznek feleljen meg G -ben egy szögpontra s G -nek két szögpontja akkor és csak akkor legyen összekötve, ha a megfelelő alkotórészeknek H -ban közös szögpontjuk van. A H részei legyenek: h_1, h_2, h_3, \dots , a nekik megfelelő szögpontok G -ben A_1, A_2, A_3, \dots ; a G -hez még újabb éleket csatolunk: h_i alkotórész azon szögpontjainak, melyek egyedül a h_i -ben szerepelnek, feleljen meg egy-egy végződő él, mely az A_i szögpontból indul ki. A szerkesztésből könnyen belátható, hogy $H = T(G)$, tehát H redukálható. Q. e. d.

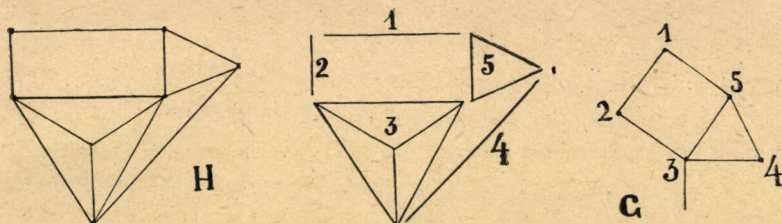
Az elmondottakra vonatkozólag egy példa a 2. ábrán látható.

Abból, hogy egy gráf redukálható, még nem következik, hogy a redukció egyértelmű. Lehet ugyanis különböző gráfoknak is

egyenlő a transzformáltja. Erre példa éppen az 1. ábrán látható két gráf, melyek mindegyikének transzformáltja egy háromszög.

Be fogjuk azonban bizonyítani, hogy az egyszerű gráfok körében ez az egyetlen eset, mikor a redukció nem egyértelmű.

II. TÉTEL: Ha egy egyszerű gráf redukálható és a háromszögtől különbözik, akkor a redukció csakis egyetlen eredményre vezethet.



2. ábra.

Ez könnyen bebizonyítható WHITNEY említett tételével. Legyen ugyanis a háromszögtől különböző H gráfnak két redukáltja G_1 és G_2 . A H egy tetszőleges szögpontjának megfelel a definíció szerint G_1 -ben a p_1 , G_2 -ben pedig a p_2 él. A G_1 gráf p_1 élének a G_2 gráf p_2 élét feleltetve meg, könnyű belátni, hogy ezzel oly kölesönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk, melynél összefutó éleknek összefutó élek felelnek meg. Ekkor azonban WHITNEY tétele szerint $G_1 = G_2$. Q. e. d.

Célunk azonban éppen WHITNEY tételének bizonyítása; ezért a II. tételt bebizonyítjuk ettől függetlenül s akkor, mint látni fogjuk, a II. tétel segítségével viszont könnyen WHITNEY tételéhez juthatunk.

Először a következő tételt bizonyítjuk be.

1. Ha valamely gráfnak két különböző redukáltja van, akkor legalább két különböző módon lehet fölbontani.

Legyen ugyanis a H gráf csakis egyetlen módon felbontható és legyen két redukáltja G_1 és G_2 ; G_1 két tetszőleges P és Q pontjában találkozó éleknek megfelel H -ban két teljes alkotórész: h_P ill. h_Q . Ezeknek akkor és csak akkor van közös szögpontjuk, ha létezik H -ban a \overline{PQ} él.

Most a fentebb közölt eljárás szerint megszerkesztünk H -hoz egy redukált gráfot, nevezzük ezt G -nek. Ezen G -ben a h_P ill. h_Q

teljes alkotórészeknek meg fognak felelni a P_0 ill. Q_0 pontok, melyek a szerkesztés szerint akkor és csak akkor vannak összekötve, ha H -ban a h_p és a h_q részeknek közös szögpontjuk van, vagyis amikor a \overline{PQ} él a G_1 -ben létezik. Rendeljük most a G -nek P_0 ill. Q_0 pontjához a G_1 -nek P ill. Q pontját, akkor ez a hozzárendelés olyan, hogy minden ponthoz egy és csak egy pont tartozik és G -ben két pont akkor és csak akkor van összekötve, ha a hozzájuk rendelt pontok G_1 -ben szintén össze vannak kötve. Ez azt jelenti, hogy $G = G_1$; ugyanígy kimutatható, hogy $G = G_2$, tehát: $G_1 = G_2$. Ezzel az 1. alatti állítást bebizonyítottuk.

Ezek után a redukció egyértelműségéhez csak azt kell kimutatni, hogy valamely egyszerű redukálható gráf csakis egyetlen módon bontható fel.

2. Ha a redukálható gráf több módon bontható fel, akkor akár-melyik szögpontból induló élek is legalább két módon oszthatók két csoportra úgy, hogy mindegyik csoport élei egy-egy teljes alkotórészben szerepeljenek.

Bizonyítás. Legyen a P -ben összefutó élek egyik csoportja: $a_1 = PA_1$, $a_2 = PA_2, \dots$ és a másik $b_1 = PB_1$, $b_2 = PB_2, \dots$; legyen továbbá h_a az első, h_b pedig a második csoportot tartalmazó teljes alkotórész. Tekintsünk egy A_i szögpontot; mivel h_a teljes, azért A_i össze van kötve a h_a valamennyi többi szögpontjával. Az A_i pontban összefutó élek közül tehát az $\overline{A_iP}$, $\overline{A_iA_1}$, $\overline{A_iA_2}$, $\overline{A_iA_3}, \dots$ egy csoportba tartoznak mint ugyanazon alkotórésznek (h_a -nak) élei. Ezek az élek ki is merítik az A_i -be futó élek egyik csoportját. Ha u. i. valamely $\overline{A_iX}$ él még ide tartoznék, akkor az alkotórészek teljessége miatt léteznie kellene egy \overline{PX} élnek, mely (a P pontból nézve is) az $\overline{A_iP}$ -ével azonos csoportba tartozik; ez pedig csak úgy lehet, hogy X az $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots$ pontok egyike.

Ha tehát a kiindulással összhangban levő felbontás egyáltalában lehetséges, akkor ez csak olyan lehet, hogy az A_i -ből induló élek közül a fentiek egy csoportba és a többi a másik csoportba kerül. E szerint a P pontban megadott beosztás egyértelműen meghatározza az A_i -beli beosztást is.

Ezt az eljárást ismételve, meghatározhatjuk a beosztást valamennyi P -vel összekötött pont számára; ezek ismeretében pedig

mindazon további pontok számára, melyek ezekkel össze vannak kötve. Így valamennyi szögponthoz eljuthatunk s ezzel az egész gráf fölbontását meghatároztuk. Azt látjuk tehát, hogy egyetlen pontban összefutó élek valamilyen csoportosítása *egyértelműen* meghatározza az egész fölbontást. Ha tehát két felbontás különböző, akkor nem lehet a gráfban olyan szögpont, amelyben összefutó élek a két felbontásnál egyformán lennének csoportosítva. Q. e. d.

Ezzel visszavezettük a redukció egyértelműségének kérdését egyetlen szögponthoz összefutó élek vizsgálatára.

3. *Egyszerű gráfban bármely szögponthoz összefutó élek vagy*

a) *csak egyetlen módon csoportosíthatók,*

vagy

β) *csak két módon, de akkor a két csoportosítás alapján elvégzett két redukció egyenlő gráfokhoz vezet.*

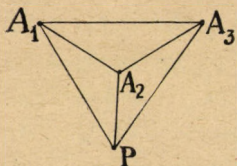
Ennek bizonyításához előbb bebizonyítjuk a következő lemmát:

Ha a gráf valamely felbontásánál egy szögponthoz összefutó három él ugyanazon alkotórészhez tartozik (az ilyen három élt *triádnak* nevezzük), akkor ez a három él minden más felbontásban is együtt marad, azaz nem létezhet olyan felbontás, mely a triád eleit különböző alkotórészekhez sorolná.

Bizonyítás. Legyen a triád $\overline{PA_1}$, $\overline{PA_2}$, $\overline{PA_3}$; mivel ezek ugyanazon alkotórészhez tartoznak, azért léteznek $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ és $\overline{A_3A_1}$ élek is. (3. ábra) Tegyük fel, hogy a P -ből induló élek egy más csoportosításánál a triád két éle, pl. $\overline{PA_1}$ és $\overline{PA_2}$ két különböző alkotórészhez, h_1 -hez ill. h_2 -höz kerül. Mivel P -ben legfeljebb két alkotórész találkozhat, azért $\overline{PA_3}$ a h_1 és h_2 részek egyikéhez tartozik, mondjuk h_1 -hez. Ekkor P , A_1 , A_3 valamennyien a h_1 szögpontjai, de A_2 nem lehet a h_1 szögpontja, mert akkor h_1 -nek és h_2 -nek két közös szögpontja volna: P és A_2 ; a gráf azonban egyszerű, tehát csak egyetlen $\overline{PA_2}$ él van és ez nem szerepelhet két alkotórészben, h_1 -ben és h_2 -ben.

E szerint az $\overline{A_1A_2}$ és $\overline{A_3A_2}$ élek a h_1 -nek egy-egy szögpontját kötik össze a h_2 -nek egy szögpontjával, e miatt ezek az élek sem a h_1 -hez, sem a h_2 -höz nem tartozhatnak. Közülük az $\overline{A_1A_2}$ él legyen valamely h_3 -nak egy éle; ekkor A_2 -ben már két alkotórész (h_2 és h_3) található, tehát az $\overline{A_2A_3}$ élnek is ezen részek egyikéhez kell tar-

toznia. Az előbbi szerint csak h_3 -hoz tartozhat. Ezzel azonban már ellentmondáshoz jutottunk: h_1 -nek és h_3 -nak két közös szögpontja van, A_1 és A_3 ; egyszerű gráfnál ez közös élt jelent, ami lehetetlen. Annak feltételezése tehát, hogy a triád két éle valamilyen felbontásnál különböző alkotórészekhez kerül: ellentmondáshoz vezet. Ezzel be van bizonyítva a triád éleinek együttmaradása.



3. ábra.

A lemmából azonnal következik, hogy ha van a gráfnak egy négynél magasabb fokú szögpontja, akkor az itt összefutó élek csak egyetlen módon csoportosíthatók.

Tekintsük ugyanis az ilyen P pontból induló élek egy csoportosítását; mivel P négynél magasabb fokú, azért az egyik csoportba bizonyosan kettőnél több él kerül; legyen ez a csoport C_1 . Ha volna egy másik, ettől különböző csoportosítás, annál is valamelyik csoport bizonyosan kettőnél több élt tartalmazna, nevezzük ezt a csoportot C_2 -nek.

Mivel a csoportosítások különbözők, azért $C_1 \neq C_2$, tehát van (legalább) egy él, mely az egyikben, pl. C_1 -ben, szerepel, de C_2 -ben nem. Ha ehhez az élhez C_1 -ből két másik élt választunk (ezt megtehetjük, mert C_1 -ben kettőnél több él van), akkor olyan triádhoz jutottunk, mely C_1 -ben együtt van, de C_2 -ben nincs, ami a lemma szerint lehetetlen.

Ezt összevetve az 1. és 2 alatt bebizonyítottakkal, kijelenthetjük, hogy *mindazon gráfok, melyek négynél magasabb fokú szögpontot tartalmaznak, csak egy módon redukálhatók*, s így most már csak azon gráfok osztályát kell megvizsgálni, melyekben minden szögpont fokszáma 1, 2, 3 vagy 4.

Tartalmazzon a redukálható gráf negyedfokú szögpontot. Az éleknek egy olyan csoportosítását, melynél az egyik csoportba x , a másikba y számú él kerül, nevezzük (x, y) típusú csoportosításnak. A gráf egy negyedfokú szögpontjából induló élek csoportosítása lehet $(4, 0)$, $(3, 1)$ vagy $(2, 2)$ típusú. Ha a $(4, 0)$ típusú csoportosítás megvalósítható, akkor a lemma szerint ez kizár minden más csoportosítást: a $(4, 0)$ típusnál ugyanis bármely három él triádot alkot (ugyanazon alkotórészben szerepel), míg a többi típusnál

mindig van olyan három él, mely nem alkot triádot s ezen három él esetén így nem lenne érvényes a triádok együttmaradása.

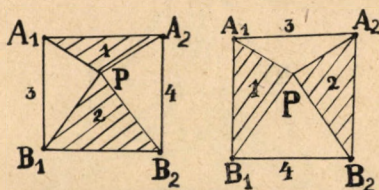
Valamely (3, 1) típusú csoportosítás szintén kizár minden egyéb lehetőséget, mert a (4, 0) típussal az előbbi szerint összeférhetetlen, a (2, 2) típussal pedig azért, mert a (3, 1) típusnál van triád, a (2, 2) típusnál pedig nincs. Két különböző (3, 1) csoportosításban pedig a két háromélű csoport bizonyosan különbözik, tehát az egyikben előforduló triád nincs együtt a másikban; a lemma szerint ez lehetetlen, tehát két különböző (3, 1) típusú csoportosítás is kizárja egymást.

Hátra van még a (2, 2) típusok vizsgálata. A lemma ezekre nem mond semmit, mert itt nincsenek triádok. Azt fogjuk látni, hogy ilyen (2, 2) típusú fölbontás esetleg egyidejűleg több is lehetséges, de ezek topológiailag megegyeznek, s így a segítségükkel végrehajtott redukciók egyenlő gráfokra vezetnek.

A P -ben összefutó négy él két csoportja legyen $\overline{PA_1}$, $\overline{PA_2}$ ill. $\overline{PB_1}$, $\overline{PB_2}$ (4. ábra).

Ekkor léteznie kell az $\overline{A_1A_2}$ és $\overline{B_1B_2}$ élnek is. Ha lehetséges egy másik (2, 2) típusú csoportosítás pl. $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$ ill. $\overline{PA_2}$, $\overline{PB_2}$ csoportok szerint, akkor létezniök kell az $\overline{A_1B_1}$ és $\overline{A_2B_2}$ élnek is. Az így keletkező (további éleket nem tartalmazó) gráf valóban két módon bontható fel (4. ábra), de a két felbontás topológiai megegyezése látnivaló.

A harmadik elképzelhető csoportosítás $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_2}$ ill. $\overline{PA_2}$, $\overline{PB_1}$ csoportok szerint, már nem

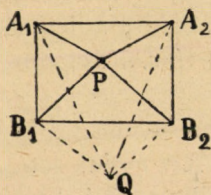


4. ábra.

fér össze az eddigiekkel, mert akkor létezni kellene az $\overline{A_1B_2}$ és $\overline{A_2B_1}$ élnek is, ekkor azonban a P , A_1 , A_2 , B_1 , B_2 pontok minden lehetséges módon össze vannak kötve, tehát egy teljes ötszöget adnak. E miatt a P -ből kiinduló négy él csoportosítható (4, 0) típus szerint is, ami (amint már láttuk) nem fér össze a feltételezett (2, 2) típussal.

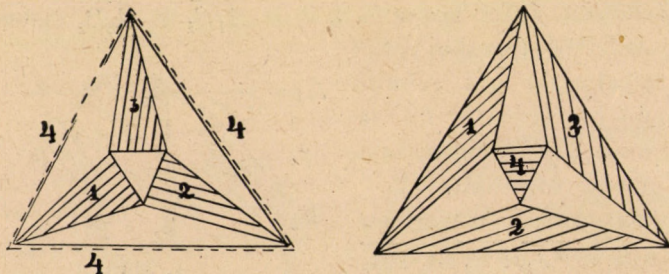
Lehetséges még, hogy az A_1 , A_2 , B_1 , B_2 pontok között is van negyedfokú. Pl. az A_1 -ből kiindul az eddigieken kívül még vala-

mely $\overline{A_1Q}$ él. Mivel az első felbontásnál A_1 -ben már két teljes alkotórész (a PA_1A_2 háromszög és az $\overline{A_1B_1}$ él) találkozik, azért az $\overline{A_1Q}$ él is ezen részek egyikéhez tartozik. Az A_1PA_2 háromszöghöz nem tartozhat, mert akkor a \overline{PQ} élnek is léteznie kellene és P négynél magasabb fokú volna. Tehát az $\overline{A_1Q}$ csak az $\overline{A_1B_1}$ -hez tartozhat; e miatt szükségképpen létezik a $\overline{QB_1}$ él is (5. ábra).



5. ábra.

Ha a másik felbontást tekintjük, akkor hasonló módon kapjuk, hogy az új Q szögpont az A_2 -vel is össze van kötve, az $\overline{A_1Q}$ él létezése miatt. Ha azonban már tudjuk, hogy létezik az $\overline{A_2Q}$ él, akkor ismét az első felbontásban az A_2 pontra alkalmazva az előbbi megfontolást, kiderül a $\overline{QB_2}$ él létezése. Ekkor már minden szögpontra négy él fut, tehát több él nem is lehet. Így végeredményben az *oktaeder* élrendszeréhez jutottunk, amely valóban két különböző módon bontható fel, de a két felbontás topológiailag



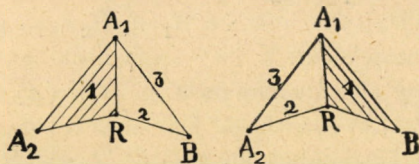
6. ábra.

most is megegyezik: mindkét esetben négy egymáshoz azonos módon csatlakozó háromszög adódik (6. ábra), s a redukció mindkét esetben a teljes négyszögre vezet.

Tartalmazzon a gráf harmadfokú szögpontot, R -et. Az itt összefutó három él vagy $(3, 0)$ vagy $(2, 1)$ típus szerint csoportosítható. A $(3, 0)$ típus a lemma szerint kizárja a többit, mert egy triád van benne, míg a többiben nincs.

E szerint csak a $(2, 1)$ típusok egymás közötti összeférhetőségét kell megvizsgálni.

Csoportosítsuk az R -ben összefutó éleket a $(2, 1)$ típus szerint, $\overline{RA_1}$, $\overline{RA_2}$ ill. \overline{RB} csoportokra. Ez csak akkor lehetséges, ha létezik az $\overline{A_1A_2}$ él is. Egy másik ilyen csoportosítás, pl. $\overline{RA_1}$, \overline{RB} ill. $\overline{RA_2}$ csoportokra ugyanígy magával hozza az $\overline{A_1B}$ él létezését. A harmadik elképzelhető $(2, 1)$ típus már nem fér össze ezekkel, mert az már az $\overline{A_2B}$ él létezését is követelné, így az R , A_1 , A_2 , B pontok teljes négyszöget adnának, tehát az R -ben össze-futó három él triádot alkotna; ez pedig, mint láttuk, nem fér össze a $(2, 1)$ típussal.



7. ábra.

Az így keletkező gráf való-ban két módon bontható fel,

de ezen felbontások is topológiailag egyenlők (7. ábra).

Talán lehetséges, hogy újabb élek csatlakoznak ehhez a gráfhoz; R -be és A_1 -be már három él fut, tehát új él csak A_2 -ből vagy B -ből indulhat. B -ben már két alkotórész találkozik ($\overline{A_1B}$ és \overline{RB}), ezért az új \overline{BX} élnek ezek egyikéhez kellene tartoznia; ez a tény egy \overline{RX} vagy egy $\overline{A_1X}$ él létezését követelné, ami ellentmond annak, hogy R -ből és A_1 -ből nem indul több él. Ebből következik, hogy B -ből sem indul harmadik él. Ugyanígy adódik a másik felbontás lehetőségéből, hogy A_2 sem lehet kettőnél magasabbfokú. Mindezek szerint, a fenti gráf nem bővíthető tovább, tehát nincs több gráf, mely a fenti (harmadfokú szögpontot tartalmazó) osztály-hoz tartozik.

Tartalmazzon a gráf másodfokú szögpontot; egy másodfokú szög-pontja legyen S ; az itt összefutó két él: \overline{SA} ill. \overline{SB} két módon cso-portosítható: $(2, 0)$ és $(1, 1)$ típus szerint. Fa a $(2, 0)$ szerinti csoportosítás lehetséges, akkor léteznie kell az \overline{AB} élnek is. Ekkor azonban már minden szögpontba két él fut, több éle, több szög-pontja már nem is lehet a gráfnak. Az így előálló gráf nem más, mint az említett kivétel, melynél a $(2, 0)$ típusú csoportosítás esetén (amikor az egész gráf képez egy alkotórészt mint háromszög) adódik a G_1 mint redukált, az $(1, 1)$ típusú csoportosításból pedig

(amikor a három élt külön-külön alkotórészeknek tekintjük) adódik a G_2 mint redukált (1. ábra).

Ezzel kimerítettük az összes lehetséges eseteket és a II. tételt bebizonyítottuk.²

Ezek után már könnyű bebizonyítani a WHITNEY-féle tételt.

Legyen adva két gráf, F_1 és F_2 , melyek között létesíthető a WHITNEY-féle tételben körülírt él-összerendelés, melyet (A) -val jelölünk. Előállítjuk F_1 és F_2 transzformáltjait, a H_1 és H_2 gráfokat. H_1 és H_2 szögpontjai közt kölcsönösen egyértelmű vonatkozást állapítunk meg, ha H_1 ill. H_2 egy-egy szögpontját akkor tekintjük megfelelőeknek, ha e szögpontoknak a transzformációnál F_1 ill. F_2 oly élei felelnek meg, melyek (A) által egymásnak felelnek meg. Az (A) vonatkozás feltételezett tulajdonságából és a transzformáció definíciójából következik, hogy H_1 -ben két szögpont akkor és csak akkor van összekötve, ha H_2 -ben a (most adott értelemben) megfelelő két szögpont is össze van kötve. Ez azt jelenti, hogy $H_1 = H_2$, azaz a transzformált gráfok egyenlők. A redukció egyértelműségéből (II. tétel) azonban következik, hogy *egyenlő gráfok redukáltjai is egyenlők*, $F_1 = F_2$, kivéve az említett egyetlen esetet.

Ez éppen WHITNEY tétele.

*

Megemlítjük még, hogy az alkalmazott módszer (a gráfok itt bevezetett transzformációja) más gráfelméleti kérdésekre is előnyösen alkalmazható, nevezetesen a gráfok ú. n. HAMILTON-féle vonalainak vizsgálatánál. Erre azonban itt már nem terjeszkedünk ki.

Krausz József.

² Ha a fentemlített különleges esetekben (mikor két különböző felbontás lehetséges) elvégezzük a redukciót, akkor éppen azokhoz a gráfokhoz jutunk, melyek WHITNEY dolgozatában is kivételes szerepet játszanak s amelyek ott a G_a , G_b , G_c jelekkel vannak jelölve.

DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME DE WHITNEY SUR LES RÉSEAUX.

À la base de nos recherches se trouve une transformation des réseaux. A un réseau G on fait correspondre un réseau H par les deux règles suivantes : 1. à chaque arête de G correspond un sommet de H ; 2. deux sommets de H sont reliés entre eux si les arêtes correspondantes de G ont un sommet commun. La transformation inverse, nommée «réduction», n'est pas toujours possible. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de la possibilité de la réduction. Puis nous démontrons que, dans le cas où la réduction est possible, elle ne peut avoir qu'un seul résultat — excepté le cas du triangle où une étoile à 3 arêtes et un triangle peuvent être les deux résultats de la réduction.

Grâce à ce théorème nous démontrons le théorème suivant de WHITNEY¹. Étant donné deux réseaux dans lesquels deux sommets ne sont reliés que par une seule arête au plus, supposons qu'on puisse établir une correspondance biunivoque entre les arêtes de ces deux réseaux de façon que si deux arêtes de l'un ont un sommet commun les arêtes correspondantes de l'autre en ont aussi ; dans ce cas les deux réseaux sont égaux — excepté le triangle et l'étoile à trois arêtes.

J. Krausz.

JELENTÉS

AZ 1943. ÉVI KLUG LIPÓT-JUTALOMRÓL.

Az első Klug Lipót-jutalom ügyében Társulatunk választmánya javaslattételre a következő bizottságot küldte ki: EGERVÁRY JENŐ, KERÉKJÁRTÓ BÉLA, RÉDEI LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI NAGY GYULA. A bizottság jelentése a következő.

«A választmány már az alapítvány első közzétételekor (lásd Mat. és Fiz. Lapok, 48. k., 36. l.) azt az óhaját fejezte ki, hogy — az alapítvány célja elérésének megkönnyítésére és egyszersmind az alapítványtevő iránti tiszteletének és hálájának kifejezésére — az első jutalomból KLUG LIPÓT tudományos működését ismertető és méltató jelentés szerzője jutalmaztassék. A Társulathoz egyetlen ilyen jelentés futott be, amelynek szerzője Dr. ZIGÁNY FERENC műegyetemi m. tanár. ZIGÁNY referátumát a bizottság céljának megfelelő világos és alapos munkának minősíti és ezért azt javasolja, hogy az első Klug Lipót-jutalom felerészben neki ítéltsék oda. A bizottság kíváncsnak tartja, hogy már első alkalommal is — az alapítvány tulajdonképpeni céljának megfelelően — eredeti geometriai kutatások is jutalmaztassanak és hogy ilyen irányú nagysikerű munkásságáért az első Klug Lipót-jutalom másik fele Dr. FEJES LÁSZLÓ kolozsvári egyetemi gyakor-noknak adassék.

FEJES LÁSZLÓnak eddig 13 matematikai dolgozata jelent meg, 6 további ki van szedve. E 19 dolgozat közül 15 geometriai tárgyú. FEJES LÁSZLÓ geometriai munkásságának főbb irányai a következők. 1. Konvex görbék megközelítése sokszögekkel. 2. Bizonyos extrémális soklapok tulajdonságai. 3. A «legsűrűbb kör-elhelyezkedés problémája» és ezzel kapcsolatos kérdések. Ebbe a három irányba tartozik FEJES számos, szép és mélyreható eredménye közül ez a három tétel:

1. Bármely konvex görbéhez megadható egy l_n kerületű beírt és egy L_n kerületű körülírt n -szög úgy, hogy $\frac{L_n - l_n}{L_n} \leq 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$.

Ez az egyenlőtlenség nem javítható.

2. Egy kivételességmentes zárt konvex felületbe írt adott csúcs-pontszámmal bíró maximális térfogatú soklap minden lapja szükségképpen háromszög.

3. Egy egységgömbön fekvő n -számú pont között mindig van két olyan, amelyek távolsága nem nagyobb mint

$$\left(4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ez az egyenlőtlenség $n = 3, 4, 6$ és 12 -re nem javítható, n nagy értékére pedig a síkbeli legsűrűbb körelhelyezkedés problémájának megoldását adja.»

A bizottság e jelentésében foglalt javaslatot a választmány 1943. febr. 25-i ülésén egyhangúlag elfogadta és az első Klug Lipót-jutalmat, két egyenlő részre elosztva, Dr. FEJES LÁSZLÓnak és Dr. ZIGÁNY FERENCnek ítélte oda, mindkét féljutalmat a Társulat vagyonából 300—300 pengőre egészítve ki.

ELEKTRONOK POLARIZÁCIÓJA.¹

Az elektronpolarizáció kísérleti vizsgálatáról az első cikk 1928 nyarán jelent meg Cox-, Mc ILWRAITH- és KURRELMAYER-től,² melynek bevezető soraiból megtudhatjuk, hogy az egész kérdés hogyan merült fel: «DAVISSON és GERMER már klasszikussá vált kísérlete, mely a DE BROGLIE-féle hullámok elhajlását mutatja ki, azt a gondolatot adta, hogy elektronsugarakkal megkíséreljünk olyan jelenséget is kimutatni, mely a fény polarizációjának analogonja. Feltételeztük, hogy a spin, melyet UHLENBECK és GOUDSMIT oly szerencsésen vezetett be a spektrumok elméletébe, olyan szerepet játszik eme kísérleteknél, mint az optikában a transzverzális fényvektor».

A nevezett szerzők kísérlete a NÖRRENBURG-féle fénypolározási, vagy még inkább a BARKLA-féle röntgenpolározási kísérlet hű mása. A fény sebességét 70—90 %-ig megközelítő sebességű β -részeket emittáló radioaktív preparátumból az elektronok 45° szög alatt egy arany lemezre esnek, melyen diffúz szórást szenvednek. A 45° szög alatt visszaverődő elektronok egy második aranylemezre esnek ugyanilyen szög alatt, végül az ismét diffúz módon szórt elektronok közül a 45° alatt tovahaladók egy csúcsszámlálót hoznak működésbe. Az elektron-forrás és az első lemez, valamint a csúcsszámláló és a második lemez egy-egy merev rendszert alkot, melyek a két lemez között haladó sugár, mint tengely körül elforgathatók.

A várt jelenség az, hogy a két beesési sík közti szögtől függően a másodszor visszavert sugár intenzitása változni fog, éspedig —

¹ A Pázmány Péter Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének 1942. márc. 13-iki kollokviumán tartott beszámoló.

² Proc. Nat. Acad. Sci. 14, 544 (1928).

az optikai analógiának megfelelően — az intenzitás az azimutnak 180° szerint periodikus függvénye lesz. Az első kísérleteknél az intenzitásnak az irány szerinti eloszlásában mutatkozott is valami aszimmetria, de Cox utóbb megismételte a kísérleteket és kimutatta, hogy az eredményeket műszerhiba torzította el, s ő csak a hibahatárokon belül eső effektust talált.

Ugyanebben az időben elvben hasonló, de részleteiben eltérő kísérleteket végzett maga DAVISSON és GERMER³ is. Ők azonban sokkal kisebb (10—200 V) energiájú elektronoknak nickel-egykristály felületéről való 45° alatti reguláris visszaverődését vizsgálták. A másodszor visszavert sugár intenzitását FARADAY-kalitikával mérték, melyre olyan előfeszültséget adtak, hogy csak azok az elektronok juthattak bele, melyek a két visszaverődés során nem vesztek el lényeges energiát. (Maximális intenzitással visszavert sugár a jelzett intervallumban 20, 55, 77, 103 és 120 V-nál van. Ezen energiaértékeknél a visszavert sugár intenzitásának az irányfüggését külön-külön vizsgálták.) Kísérletük negatív eredménnyel végződött.

JOFFE és ARSENEVA⁴ 80—6400 V energiájú elektronokkal kis (10 — 30°) beesési szög esetén végzett kísérleteinek az eredménye szintén negatív maradt.

WOLF⁵ úgy gondolta, hogy ha az elektronok mágneses dipólusok, akkor egy mágneses térben való áthaladás alatt bizonyos polarizált állapotba kell jutniuk. Ezt a polarizációt akarta a visszaverődéskor fellépő aszimmetrikus intenzitáseloszlással kimutatni, de próbálkozása sikertelen maradt.

Az eddigiektől egészen eltérő kísérletet végzett MYERS és Cox.⁶ Ők a turmalinkristállyal való fénypolározás megfelelőjét keresték, midőn vékony ($2,5 \cdot 10^{-3}$ cm) vaslemezen merőlegesen bocsátottak át β -sugarakat. A lemezek saját síkjukban voltak mágneseszeve, de a mágneses erővonalak kölcsönös helyzete nem befolyásolta az átmenő sugár intenzitását.

³ Nature 122, 809 (1929).

Phys. Rev. 33, 760 (1929).

⁴ Compt. Rend. 188, 152 (1929).

⁵ Zeitschr. f. Phys. 52, 314 (1928).

⁶ Phys. Rev. 34, 1067 (1929).

Cox és munkatársainak már idézett munkáját CHASE⁷ folytatta, visszatérve az elektronpolarizáció kimutatására irányuló korábbi módszerekhez. Nála a nagy energiájú β -részek egy ólomtömb felületéről verődtek vissza, a beeső és visszavert sugár egymásra merőleges volt. Kísérleteinél a zavaró körülmények (γ -sugarak, szekundár röntgensugarak) hatásának kiküszöbölésére igen nagy gondot fordított. Mérései pontossága kb. 1%, s ezen határon túlmenő effektust nem tudott kimutatni. Második közleménye szerint talált aszimmetriát az intenzitáseloszlásban. Éspedig közepes sebességű elektronok esetén a beesési síkok kétféle parallel állásánál (vagyis amikor a másodszor visszavert sugár az első beeső sugárral megegyező, illetve ellentétes irányban halad), és nagy sebességű elektronok esetén ezenfelül a beesési síkoknak két egymásra merőleges (tehát a parallel helyzettől számított 90°- és 270°-os) állása esetén is.

Az első kísérleti vizsgálatokkal kb. egyidőben megindult a kérdés elméleti vizsgálata is, mely eleinte csak némi támpontot adott a kísérletezőknek, majd később a kísérleti vizsgálatokat azáltal irányította, hogy pontosan leírta a várható effektust és előírta azokat a feltételeket, amelyek mellett pozitív eredmény egyáltalán lehetséges. Cox és munkatársai cikkéből vett idézet mutatja, hogy a polarizációban az elektronspin egy megnyilvánulását várták. Ha a kérdés elméleti oldalát nézzük, akkor az elektronpolarizációs kísérletek kimenetelét — éppen az elektronspin miatt — igen nagy jelentőségűnek találjuk.

UHLENBECK és GOUDSMIT feltevése igen gyümölcsöző, sőt nélkülözhetetlen egyes jelenségek értelmezésénél — spektrumok multiplicitása, anomális ZEEMAN-effektus, STERN—GERLACH kísérlet — de ha ezeket a jelenségeket közelebbről tekintjük, észre vesszük, hogy ezeknél mindig atomi kötélekben levő elektronok szerepelnek. Önként felmerül tehát az a kérdés, hogy szabad elektronoknak is van-e spinjük, illetve, hogy a szabad elektronok spinjét milyen módon lehet észlelni.

Az elektron mágneses momentumának kimutatására a legkézenfekvőbb módszer egy közvetlen magnetométeres mérés

⁷ Phys. Rev. 34, 1069 (1929),
Phys. Rev. 36, 1060 (1930).

lenne. Ilyen mérés azonban, mint BOHR^s kimutatta, a bizonytalansági reláció miatt nem vezethet eredményre.

Tegyük fel u. i., hogy egy elektron helyét Δr bizonytalansággal ismerjük, s egy tőle r távolságban levő pontban akarjuk a momentumát meghatározni. A kérdéses momentumra természetesen csak akkor kaphatunk hasznavehető felvilágosítást, ha $\Delta r \ll r$. Mármint az elektron, mint M momentumú dipólus okozta mágneses tér intenzitása, amit mérni akarunk:

$$H \sim \frac{M}{r^3}.$$

Ha az ε töltésű elektron v sebességgel mozog, akkor emiatt további mágneses erőter lép fel, melynek intenzitása:

$$\frac{\varepsilon v}{cr^2},$$

melyet szintén nem ismerünk pontosan az elektron sebességének meghatározásában fellépő bizonytalanság miatt. Hogy a mágneses momentum meghatározható legyen, kell hogy a LORENTZ-erő bizonytalansága kisebb legyen, mint az elektron saját momentumának okozta térintenzitás, vagyis:

$$\frac{\varepsilon \Delta v}{cr^2} \ll \frac{M}{r^3},$$

vagy az elektron egyébként ismert mágneses momentumát beírva:

$$\frac{\varepsilon \Delta v}{cr^2} \ll \frac{\varepsilon h}{4\pi mc} \frac{1}{r^3}; \Delta v \cdot r \ll \frac{h}{4\pi m}.$$

A bizonytalansági reláció miatt azonban:

$$\Delta v \cdot \Delta r = \frac{h}{m},$$

tehát

$$\Delta v \cdot r \ll \Delta v \cdot \Delta r,$$

azaz

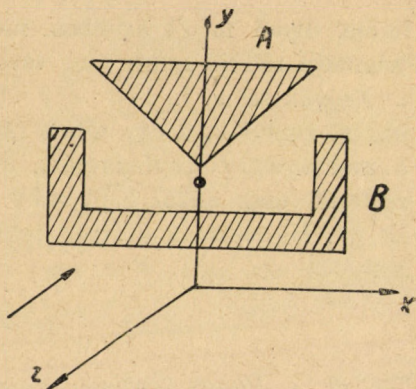
$$r \ll \Delta r,$$

vagyis a mérés keresztülvihetősége feltételének ellenkezőjére jutottunk.

^s Proc. Roy. Soc. A 124, 425 (1928), Appendix.

Egy másik kínálózó eljárás az lenne, hogy elektronokkal hajtsunk végre egy STERN—GERLACH-kísérletet. Ugyancsak BOHR⁸ mutatta ki, hogy ez sem vezethet eredményre.

Tekintsük az 1. ábra szerinti elrendezést. Az A és B mágnes-saruk között előálló mágneses tér inhomogén, az yz -síkra szimmetrikus és z -komponense nincs. Az elektronok a z -tengellyel párhuzamosan haladnak,



1. ábra.

s a kísérlet célja az, hogy egy y -irányú felbomlásból mérjük a mágneses nyomatékot. Az elektronra ható erő, mely a felbomlást előidézi

$$\pm M \frac{\partial H_y}{\partial y}.$$

Mármost a mozgása miatt minden elektron fog eltérítést szenvedni, éspedig az xy -síkban mozgók az x -irányban térnek el. Ez az eltérés még nem okoz zavart, mert a felbomlás irányára merőleges. Azonban a sugárnak véges keresztmetszete van, és a tér inhomogenitása miatt az yz -síkon kívül mozgó elektronokra egy x -irányú H_x komponens is hat.

Az yz -siktól Δx távolságban ható erő:

$$\frac{ev}{c} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} \cdot \Delta x.$$

Mivel vákuumban:

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} \Delta x = - \frac{\partial H_y}{\partial y} \cdot \Delta x;$$

vagyis a kétféle erő abszolút értékének aránya:

$$\frac{\frac{\varepsilon h}{4\pi mc} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial y}}{\frac{\varepsilon v}{c} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial y} \cdot \Delta x} = \frac{h}{4\pi mv} \cdot \frac{1}{\Delta x} = 1 : \frac{4\pi \Delta x}{\lambda},$$

ahol $\lambda = \frac{h}{mv}$ a DE BROGLIE-féle hullámhossz.

Legyen Δx a rés szélének távolsága az yz -síktól. Hogy a résen elhajlási jelenség be ne következzen, kell hogy $\Delta x \gg \lambda$ legyen, de ekkor:

$$1 : \frac{4\pi \cdot \Delta x}{\lambda} < 1,$$

ami azt jelenti, hogy — tekintettel az erők irányára — az elektronok a mérni kívánt felbomlásnál nagyobb, de ellenkező irányú eltérítést szenvednek.

Az első pillanatban úgy látszik, hogy az eddig elmondottakból azt a következtetést kell levonnunk, hogy nincs értelme a szabad elektronoknak mágneses momentumot tulajdonítani. Valójában azonban BOHR meggondolásai csak annyit jelentenek, hogy e sajátságot nem lehet olyan kísérlettel kimutatni, mely valamilyen *klasszikus* elgondolás alapján az elektron mágneses nyomatékát közvetlenül akarja meghatározni. Ez azonban egyáltalán nem jelenti, hogy az elektron mágneses momentumát semmiféle kísérlettel nem lehet kimutatni. Igenis kedvezőek lesznek a kilátások akkor, ha meggondolásainkat DIRAC elméletére alapítjuk. A következőkben kövessük DARWIN^{9, 10} gondolatmenetét, aki DIRACnak a nem-kommutatív algebra módszereivel dolgozó elméletét szokottabb és konkrét számításokra alkalmasabb alakra hozta, s részben tovább is fejlesztette.

Mint ismeretes, DIRAC elméletében egy elektront négy hullámfüggvény ír le: $\psi_k(x, y, z, t)$, $k=1, 2, 3, 4$; annak a valószínűsége, hogy t időpillanatban a $d\tau$ térfogatelemben van egy elektron:

$$\sum_{k=1}^4 |\psi_k|^2 d\tau.$$

⁹ Proc. Roy. Soc. A 118, 654 (1928).

Proc. Roy. Soc. A 120, 621 (1928).

¹⁰ L. DE BROGLIE: L'électron magnétique (Paris, 1934), chap. 13, 14.

ϕ_k a következő differenciálegyenlet-rendszernek tesz eleget:

$$\begin{aligned}(p_0 + mc)\phi_1 + (p_1 - ip_2)\phi_4 + p_3\phi_3 &= 0, \\(p_0 + mc)\phi_2 + (p_1 + ip_2)\phi_3 - p_3\phi_4 &= 0, \\(p_0 - mc)\phi_3 + (p_1 - ip_2)\phi_2 + p_3\phi_1 &= 0, \\(p_0 - mc)\phi_4 + (p_1 + ip_2)\phi_1 - p_3\phi_2 &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

ahol erőmentes térben:

$$p_0 = -\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}; \quad p_1 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}; \quad \text{stb.}$$

Ha periodikus megoldást keresünk, akkor p_0 helyébe W/c irandó, ahol W az elektron energiája. Kimutatható, hogy ha ϕ valamilyen megoldása a SCHRÖDINGER-egyenletnek, akkor:

$$\phi_k = a_k \phi,$$

és a négy együttható közül csak kettő választható önkényesen, a másik kettő ezektől függ. Legyen például a két tetszés szerint választott állandó: $a_3 = A$, $a_4 = B$, akkor:

$$a_1 = -\frac{p_3 A + (p_1 - ip_2) B}{\frac{W}{c} + mc} \quad \text{és} \quad a_2 = -\frac{(p_1 + ip_2) A - p_3 B}{\frac{W}{c} + mc}.\tag{2}$$

Képezve most a $\rho = -e \Sigma |\phi_k|^2$ töltéssűrűség és a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

kontinuitási egyenletnek megfelelő \mathbf{j} áramsűrűség kifejezését, a következő eredményre jutunk:

$$\mathbf{j} = e\mathbf{u} = e\mathbf{v} + \text{rot } \mathfrak{P},\tag{3}$$

ahol a $\mathfrak{P}(P_x, P_y, P_z)$ vektor komponensei:

$$\begin{aligned}P_x &= -\frac{e\hbar}{4\pi mc} (\phi_3^* \phi_4 + \phi_3 \phi_4^*), \\P_y &= -\frac{e\hbar}{4\pi mc} i(\phi_3 \phi_4^* - \phi_4 \phi_3^*), \\P_z &= -\frac{e\hbar}{4\pi mc} (\phi_4 \phi_4^* + \phi_3 \phi_3^*).\end{aligned}\tag{4}$$

A \mathfrak{P} tag a DIRAC-egyenletekből való kiindulás különleges következménye. Kérdés, milyen jelentést tulajdonítsunk ennek a tagnak?

Hogy e kérdésre felelhessünk, egy rövid elektrodinamikai megfontolásra van szükség.

Ismeretes, hogy egy m momentumú dipólus terét a következő potenciálból származtathatjuk:

$$\varphi = \left(m, \text{grad} \frac{1}{r} \right),$$

tehát a ható erő:

$$- \text{grad} \left(m, \text{grad} \frac{1}{r} \right).$$

Könnyű belátni, hogy ez a kifejezés ilyen alakban is írható:

$$\text{rot} \left[m, \text{grad} \frac{1}{r} \right],$$

ami viszont azt jelenti, hogy az m momentumú dipólus erőterét az

$$\alpha = \left[m, \text{grad} \frac{1}{r} \right]$$

vektorpotenciálból is leszámaztathatjuk.

Ha \mathfrak{P} a térfogategység momentuma, akkor az egész test terének vektorpotenciálja:

$$\mathfrak{A} = \int \left[\mathfrak{P}, \text{grad} \frac{1}{r} \right] d\tau.$$

E vektorpotenciál x -komponense:

$$\begin{aligned} A_x &= \int \left(\mathfrak{P}_y \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \mathfrak{P}_z \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \right) d\tau = \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{P}_y}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathfrak{P}_z}{r} \right) \right] d\tau + \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Az első integrált a GREEN-tétel szerint átalakíthatjuk felületi integrállá, s ha a felületen $\mathfrak{P}=0$, akkor az integrál eltűnik. Ha a számítást minden komponensre elvégezzük, akkor eredményünket a következőképpen foglalhatjuk össze:

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\text{rot } \mathfrak{P}}{r} d\tau.$$

Ez tehát egy $\mathfrak{M} = \int \mathfrak{P} d\tau$ mágneses momentumú test vektorpotenciálja. Ha a test v sebességgel mozog, akkor egy további mágneses tér is fellép, melynek vektorpotenciálja:

$$\mathfrak{A}' = \int \frac{\varrho v}{r} d\tau,$$

ahol ϱ a töltéssűrűség.

A két vektorpotenciál eredője:

$$\int \frac{\varrho v + \text{rot } \mathfrak{P}}{r} d\tau.$$

Ez a vektorpotenciálja azon u sebességgel mozgó testnek, melyre fennáll, hogy:

$$\varrho u = \varrho v + \text{rot } \mathfrak{P}.$$

Ez a kifejezés pedig DARWIN eredményével azonos, mely tehát úgy értelmezhető, hogy az elektront reprezentáló hullámhoz

$$\int \mathfrak{P} d\tau \quad (5)$$

mágneses momentum tartozik. Ha ezen integrálba \mathfrak{P} egyes komponenseit behelyettesítjük, az integrálást elvégezzük és megfelelő normálásról gondoskodunk, akkor megkapjuk az elektron mágneses momentumának komponenseit. Tekintsünk pl. klasszikus közelítésben ($v \ll c$) egy síkhullámot:

$$\phi_3 = A e^{\frac{2\pi i}{h} [Wt - m(xv_x + yv_y + zv_z)]},$$

$$\phi_4 = B e^{\frac{2\pi i}{h} [Wt - m(xv_x + yv_y + zv_z)]}.$$

Ennek a mágneses momentuma (4) és (5) alapján:

$$M_x = -\frac{\epsilon h}{4\pi mc} \frac{A^* B + A B^*}{A A^* + B B^*},$$

$$M_y = -\frac{\epsilon h}{4\pi mc} i \frac{A B^* - A^* B}{A A^* + B B^*},$$

$$M_z = -\frac{\epsilon h}{4\pi mc} \frac{B B^* - A A^*}{A A^* + B B^*}.$$

A komponensek négyzetösszegéből négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy a mágneses momentum abszolút értéke:

$$|\mathfrak{M}| = \frac{\varepsilon h}{4\pi mc},$$

vagyis egy BOHR-féle magneton.

Nem szabad természetesen elfelejteni, hogy a kapott kifejezések statisztikus jelentésűek, vagyis: sok elektronnak, melyek mindegyikét a ψ_k függvény ír le, ha megmérjük például a mágneses momentuma x -komponensét, különböző értékeket kapunk, melyeknek középértéke: $\int P_x d\tau$.

A mágneses momentum vektora és a hullámfüggvények A és B amplitudója között igen szemléletes összefüggést vezethetünk le. Legyen χ az \mathfrak{M} vektor és a koordinátarendszerünk z -tengelye közti szög, ω pedig az x -tengelytől számított azimut. Ekkor:

$$\begin{aligned} M_x : M_y : M_z &= (-A^*B - AB^*) : i(AB^* - A^*B) : (BB^* - AA^*) = \\ &= \sin \chi \cos \omega : \sin \chi \sin \omega : \cos \chi = \\ &= 2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} \cos \omega : 2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} \sin \omega : \left(\cos^2 \frac{\chi}{2} - \sin^2 \frac{\chi}{2} \right), \end{aligned}$$

vagyis:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{B}{A} - \frac{B^*}{A^*} \right) : i \left(\frac{B^*}{A^*} - \frac{B}{A} \right) : \left(\frac{BB^*}{AA^*} - 1 \right) = \\ = 2 \cotg \frac{\chi}{2} \cos \omega : 2 \cotg \frac{\chi}{2} \sin \omega : \left(\cotg^2 \frac{\chi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ezt az arányhármast kielégíti a következő kifejezés:

$$-\frac{B}{A} = \cotg \frac{\chi}{2} e^{i\omega}. \quad (7)$$

Eredményünknek a következő szemléletes értelmet adhatjuk (l. 2. ábra): tekintsünk egy egységnyi sugarú gömböt. Az \mathfrak{M} vektort a gömb felületével való M dőféspontjának (χ, ω) koordinátái határozzák meg. Vetítsük e pontot az «északi» pólusból sztereografikusan az «egyenlítő» síkjára. Az m vetületi pont koordinátái: $x = \cotg \frac{\chi}{2} \cos \omega$, $y = \cotg \frac{\chi}{2} \sin \omega$. Ha az egyenlítő síkját komplex síknak tekintjük, akkor az m pont éppen a $\cotg \frac{\chi}{2} e^{i\omega}$ mennyiséget, vagyis a $-B/A$ hányadost reprezentálja.

mos vagy tisztán mágneses rács az elektronnalábót nem polarizálja. Némely esetben, ha elektromos és mágneses tér együttesen van jelen, akkor felléphet polarizáció, mindazonáltal DARWIN valószínűtlennek találja, hogy természetes kristályok erőtere az effektus előidézéséhez elég erős lenne. HALPERN¹¹ úgy találta, hogy egy sík rács okozta polarizációt a másodrendű közelítésig vitt számítások mutatják meg: becslése szerint a (másodrendű) effektus a szóró elem rendszámának négyzetével arányos.

FUESS és HELLMANN¹² ad egy módszert poláros elektronsugár előállítására és a polarizáció kimutatására, de módszerük gyakorlati megvalósításra nem alkalmas. E módszer lényege a következő: egy STERN—GERLACH kísérlet mágneses teréből kikerült atomokat, melyek mindegyikének mágneses momentuma egy irányba, mondjuk a z -tengely irányába mutat, világítsuk meg — például ultrabolya — fénnel. Erre ezek elektronokat fognak kibocsátani. A kilépő elektronokat polárosaknak mondhatjuk, u. i. a perturbációszámítás módszereit követve, ki lehet mutatni, hogy a fény, mint elektromágneses tér okozta perturbáció, mely az elektronok kilépéséhez vezet, az elektronok mágneses momentumának irányát nem változtatja meg, tehát a keletkező elektronsugárban minden elektron mágneses momentuma ugyanabba az irányba mutat.

Mindazonáltal nem lenne értelme poláros elektronsugárról beszélni, ha azt kimutatni nem lehetne. A fenti eljárással kapott elektronsugár poláros voltának a kimutatására alkalmas a következő eljárás: az elektronokat egy pozitív ionfelhőn vezetve át, az ionok az elektronokkal semleges atomokká egyesülnek, s a keletkező atomokat újabb STERN—GERLACH kísérletnek vetjük alá. Ha a kísérlet azt mutatná, hogy a vizsgált atomsugárban az egyes atomok mágneses momentuma egyirányú, az azt jelentené hogy a fotoeffektussal nyert elektronsugár valóban poláros volt.

Ez az elvben egyszerű kísérlet technikai nehézségek miatt alig keresztülvihető, s eddig nem is került sor a megvalósítására.

FRENKEL¹³ a DIRAC-hullámoknak két közeg határán levő

¹¹ Zeitschr. f. Phys. 67, 320 (1931).

¹² Phys. Zeitschr. 31, 465 (1930).

¹³ Compt. Rend. 188, 153 (1929).

potenciál-ugrásról való visszaverődését vizsgálta. Számításai szerint ilyen visszaverődésnél polarizáció nem jön létre. FRENKEL nyomán jár ALEXANDROW.¹⁴ A DIRAC-féle egyenletekből kiindulva a potenciál-ugrásról való visszaverődést részletesebben tárgyalva a visszavert amplitudókra az optikai FRESNEL-formulákhoz analog kifejezésekre jut, és kimutatja, hogy a fényvisszaverődéskor létrejövő polarizációnak megfelelő jelenség elektronok esetében lehetetlen. Ugyancsak FRENKEL vizsgálataiba kapcsolódik bele és eredményeit általánosítja FÖRSTER.¹⁵ Kimutatja, hogy egy tetszőleges potenciálkülöbség sem a rajta visszaverődő, sem a rajta áthaladó elektronokra nem hat sem «polarizátor», sem «analizátor» gyanánt: polarizálatlan sugarat nem polároz, polárosat pedig a polarizáció irányától és nagyságától függetlenül ver vissza, illetve bocsát keresztül.

WEISSKOPF¹⁶ kimutatja, hogy egy kristálynak lehetnek bizonyos kitüntetett hálózati síkjai, amelyről visszavert elektronok aránylag erősen polarizáltak, s vannak olyan visszaverődések, melyeknél a BRAGG-féle feltételek a kristályszimmetria miatt egyszerre több hálózati síkra teljesülnek. Egy hálózati síkon való visszaverődés esetén azonban észlelhető mértékű polarizáció nem várható. Ezekhez az eredményekhez DAVID¹⁷ azt fűzi hozzá, hogy a polarizáció függ a szórás szögétől, és a kísérleti szempontból számba vehető eseteknél a polarizáció mindenképpen gyengébb annál, semhogy észlelhető lenne.

Ama jelenség elméletét, amelynek alapján az elektronsugarak polarizációját kísérletileg is igazolni lehet, MOTT¹⁸ adta meg. Első dolgozata — az elektronpolarizáció kimutatásának lehetőségeit vizsgáló elméleti értekezések közül elsőnek — nyomban DARWIN dolgozatai után jelent meg, s e téren egészen alapvető.

Tekintsünk egy elektronsugarat, mely egyetlen egy atomon szóródik. $V(r)$ legyen az elektronok potenciális energiája a szó-

¹⁴ Zeitschr. f. Phys. 60, 387 (1930).

¹⁵ Zeitschr. f. Phys. 85, 514 (1933).

¹⁶ Zeitschr. f. Phys. 93, 561 (1935).

¹⁷ Zeitschr. f. Phys. 105, 747 (1937).

¹⁸ Proc. Roy. Soc. A 124, 425 (1928).

Proc. Roy. Soc. A 135, 429 (1932).

rást előidéző atomtól r távolságban. Kérdés, hogy az atomtól r távolságban levő dS felületelemen hány elektron megy át másodpercenként. A dS -re jutó elektronok száma a dS felületelem nagyságával arányos, a szóró atomtól való távolság négyzetével fordítva arányos lesz, tehát arányos lesz azzal a $d\Omega$ térszöggel, amely alatt dS a szóró atomból látszik. Legyen a szóró atom egy derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjában, r, ϑ, φ pedig jelentsen polárkoordinátákat, úgyhogy ϑ -t a z -tengelytől, a φ azimutot pedig az xy -síkban az x -tengelytől számítjuk. Ha most egy elektronsugár a z -tengely mentén esik be, akkor egy (ϑ, φ) irányban a $d\Omega$ térszögbe szórt elektronok száma arányos lesz a beeső elektronok számával (N_0), a térszöggel és függni fog a (ϑ, φ) iránytól:

$$N = N_0 \cdot P(\vartheta, \varphi) \cdot d\Omega. \quad (8)$$

Most tegyük fel, hogy $V(r)$ gyorsabban tart zérushoz, mint $1/r$, midőn r a végtelenhez tart. A z -tengely mentén beeső v sebességű elektront reprezentálja az

$$e^{\frac{2\pi i}{h} mvz}$$

síkhullám; a visszavert hullám pedig az (r, ϑ, φ) pontban:

$$\frac{1}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} mvr} \cdot u(\vartheta, \varphi).$$

Ebből következik, hogy az (r, ϑ, φ) pontban levő dS felületelemen egységnyi idő alatt áthaladó elektronok száma:

$$N = v \frac{1}{r^2} dS |u(\vartheta, \varphi)|^2 = v |u(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega.$$

Ha tehát a beeső elektronsugárban egységnyi keresztmetszeten egységnyi idő alatt egy elektron halad át, akkor:

$$P(\vartheta, \varphi) = |u(\vartheta, \varphi)|^2, \quad (9)$$

$P(\vartheta, \varphi) \cdot d\Omega$ az u n. hatáskeresztmetszet. A szórási probléma tehát végeredményben a következő: keresendő a hullámegyenletnek egy olyan ψ megoldása, mely nagy r esetén egy beeső és egy visszavert hullámot jelent, tehát kell hogy nagy r esetén:

$$\psi \sim ae^{\frac{2\pi i}{h}mvz} + \frac{1}{r}e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} \cdot u(\vartheta, \varphi)$$

legyen.

A szórási probléma DIRAC-elmélet szerinti tárgyalásánál négy komponensből álló megoldást keresünk:

$$\psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} + \frac{1}{r} e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} \cdot u_k(\vartheta, \varphi); \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

a_k közül csak kettő választható önkényesen, pl. $a_3 = A$, $a_4 = B$, a másik kettő (2) szerint függ össze, u_k szintén függ A -tól és B -től.

Ebben az esetben a hatáskeresztmetszet:

$$P.d\Omega = (|u_3|^2 + |u_4|^2)d\Omega,$$

és amint a beeső sugárban:

$$-\frac{B}{A} = \cotg \frac{\chi}{2} e^{i\omega},$$

úgy a szórt sugárban:

$$-\frac{u_4}{u_3} = \cotg \frac{\chi'}{2} e^{i\omega'}$$

összefüggés áll fenn a spinirányok és az amplitudók között.

Mert az általános megoldást két speciális megoldás szuperpozíciójaként állítja elő. Az $A=1, B=0$ és $A=0, B=1$ érték-párokhöz két, ellentétesen polározott sugár tartozik. Ki lehet mutatni, hogy ha az első esetben a megoldás ψ'_k , a másodikban pedig ψ''_k , akkor a polározatlan sugárnak megfelelő általános megoldás:

$$\psi_k = A\psi'_k + B\psi''_k. \quad (11)$$

A jelen esetben:

$$\begin{aligned} \psi'_3 &\sim e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} + \frac{1}{r} e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} \cdot f(\vartheta); & \psi''_3 &\sim -\frac{1}{r} e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} \cdot g(\vartheta) e^{-i\varphi}; \\ \psi'_4 &\sim \frac{1}{r} e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} \cdot g(\vartheta) e^{i\varphi}; & \psi''_4 &\sim e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} + \frac{1}{r} e^{\frac{2\pi i}{h}mvz} \cdot f(\vartheta), \end{aligned} \quad (12)$$

ahol f és g csak ϑ függvénye. Ekkor (10), (11) és (12) szerint a (9)-ben szereplő u_k -ra:

$$\begin{aligned} u_3(\vartheta, \varphi) &= Af - Bge^{-i\varphi}, \\ u_4(\vartheta, \varphi) &= Bf + Age^{i\varphi} \end{aligned} \quad (13)$$

adódik. Ebből:

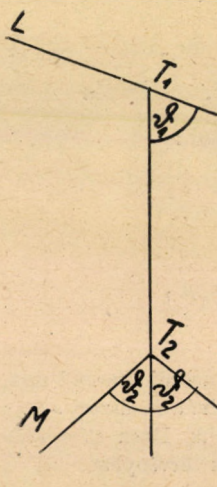
$$\begin{aligned} |u_3|^2 + |u_4|^2 &= (|A|^2 + |B|^2)(|f|^2 + |g|^2) + \\ &+ (fg^* - f^*g)(-Ab^*e^{i\varphi} + A^*Be^{-i\varphi}), \end{aligned} \quad (14)$$

tehát $A = -\sin \frac{\chi}{2}$ és $B = \cos \frac{\chi}{2} e^{i\omega}$ behelyettesítésével:

$$P = |f|^2 + |g|^2 + D \cdot \sin \chi \sin(\omega - \varphi),$$

ahol

$$D(\vartheta) = i(fg^* - f^*g),$$



3. ábra.

χ és ω a spinirányt határozza meg. Ha a szóbanforgó szórási irányra $D \neq 0$, akkor a hatáskeresztmetszet a beeső sugárban haladó elektronok spinbeállításától függ, vagyis, ha a beeső sugár polarizálatlan, akkor a szórt már poláros lesz. A fellépő polarizációt egy második szórással lehet kimutatni.

Tekintsük (l. 3. ábra) az LT_1 sugárnak — mely a koordináta-rendszer z -tengelyébe esik — a T_2 irányába, tehát ϑ_1 szög alatt szórt részét. A T_1T_2 sugárban a spinbeállást meghatározó két amplitudó — ha az LT_1T_2 síkot vesszük $\varphi = 0$ síknak:

$$Af_1 - Bg_1; Ag_1 + Bf_1,$$

ahol:

$$f_1 = f(\vartheta_1); g_1 = g(\vartheta_1).$$

A második szórással keletkező sugárban haladó elektronok számának meghatározására a T_1T_2 sugarat tekintjük beeső sugár-

nak, és erre újból elvégezzük az előbbi számítást. Ekkor azt találjuk,¹⁹ hogy — egy konstans faktortól eltekintve —:

$$\phi_3 = A_1 J, \quad \phi_4 = B_1 J,$$

ahol $J = e^{\frac{2\pi i}{h} m v z}$ és

$$\begin{aligned} A_1 &= (A f_1 - B g_1) \cos \frac{\vartheta_1}{2} + (A g_1 + B f_1) \sin \frac{\vartheta_1}{2}, \\ B_1 &= (A g_1 + B f_1) \cos \frac{\vartheta_1}{2} - (A f_1 - B g_1) \sin \frac{\vartheta_1}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Egy adott (ϑ_2, φ_2) irányban szórt elektronok számának kiszámítása végett (14)-be A helyett A_1 és B helyett B_1 irandó. Mivel pedig az LT_1 sugár polarizálatlan, az ottani összes spin-irányra közepelni kell.

A kapott formula meglehetősen bonyolult, de $A = -\sin \frac{\chi}{2}$ és $B = \cos \frac{\chi}{2} e^{i\omega}$ értéket behelyettesítve AA^* , BB^* és AB^* középvértéke rendre $1/2$, $1/2$ és 0 . Ekkor (16)-ból:

$$(A_1 A_1^*)_{\text{közép}} = (B_1 B_1^*)_{\text{közép}} = \frac{1}{2} (f_1 f_1^* + g_1 g_1^*),$$

és

$$(A_1 B_1^*)_{\text{közép}} = \frac{1}{2} (f_1 g_1^* - f_1^* g_1) = -\frac{i}{2} D(\vartheta_1).$$

¹⁹ Most u. i. célszerűen úgy választottuk meg a koordinátarendszert, hogy $T_1 T_2$ essék a z -tengelybe, vagyis az előbbi koordinátarendszert a rajz síkjára merőleges y -tengely körül ϑ -szöggel elforgattuk. Ilyen elforgatás esetén azonban a DIRAC-egyenletek akkor maradnak érvényben, ha a korábbi $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ megoldások helyébe rendre a

$$\psi_1 \cos \frac{\vartheta}{2} + \psi_2 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$\psi_2 \cos \frac{\vartheta}{2} - \psi_1 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$\psi_3 \cos \frac{\vartheta}{2} + \psi_4 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$\psi_4 \cos \frac{\vartheta}{2} - \psi_3 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

kifejezéseket tesszük.⁹

Tehát a (ϑ_2, φ_2) irányban szórt elektronok száma

$$(f_{11}^* + g_1 g_1^*)(f_{22}^* + g_2 g_2^*) + D_1 D_2 \cos \varphi_2$$

értékkel arányos.

A $T_1 T_2$ irány, mint tengelykörüli aszimmetriára vagyunk kíváncsiak. Adott ϑ_1 és ϑ_2 , de változó φ_2 esetén a szórt elektronok száma a következő mennyiséggel arányos:

$$1 + \delta \cos \varphi_2,$$

ahol:

$$\delta = \frac{D(\vartheta_1) \cdot D(\vartheta_2)}{(f_{11}^* + g_1 g_1^*)(f_{22}^* + g_2 g_2^*)}.$$

Ha $D(\vartheta) = 0$, akkor nincs aszimmetria.²⁰

A gyakorlati szempontból az az eset fontos, amikor a szórást előidéző tér COULOMB-féle, vagyis $V(r) = -Z\epsilon^2/r$. Ebben az esetben is érvényesek az eddigi általános megfontolásaink, azonban a DIRAC-egyenlet megoldásának explicit alakja különbözik attól, amely végtelenben $1/r$ -nél gyorsabban eltűnő potenciál esetén érvényes. Eme kérdések vizsgálatához nagy matematikai apparátusra van szükség, és a meglehetősen hosszú számítások nem férnek bele a beszámoló kereteibe. Így csak MOTT megfontolásainak végeredményére szorítkozunk.

COULOMB-tér esetén is érvényes, hogy ha elektronok kétszer egymás után szóródnak, úgy, hogy a beesési síkok párhuzamosak, akkor a szerint, hogy az eredeti és a másodszor szórt sugár egy irányban, vagy ellenkező irányban halad, a szórt intenzitás maximális, illetve minimális. A két érték különbségének a középértékhez való viszonya %-okban kifejezve adja a percentuális aszimmetriát. Aranynál 90° alatti szórás esetében a numerikus számítások a következő eredményre vezettek:

²⁰ Ez nem jelenti, hogy a spinbeállást az első szórás nem változtatja meg. Az új spinbeállást u_4/u_3 adja, ahol: $u_3 = Af_1 - Bg_1$ és $u_4 = Ag_1 Bf_1$. De ha $D(\vartheta) = 0$, akkor a g/f hányados, és így u_4/u_3 is valós. Ha tehát a tengelyeket $-2 \arctg(u_4/u_3)$ szöggel elfordítjuk a rajz síkjára merőleges tengely körül, akkor az új rendszerben a hullámfüggvények aránya: B/A . Így valamennyi elektron spinjének iránya ugyanazt a változást szenved. Vagyis egy polarizálatlan sugár polarizálatlan is marad.

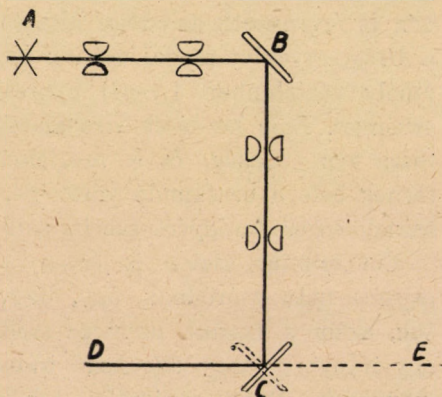
v/c	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
kV	2.56	10.5	25	45	79	127	204	340	662	∞
200 δ	—	0.5	0.2	3.0	11.5	15.5	14.0	10	5	—

MOTT elméletének megismerése után az elmélet megjelenését megelőző időkben végzett kísérletek negatív eredményét legtöbb esetben megértjük, hiszen a kísérleti körülmények nem egyeznek a számításokban kihasznált feltételekkel vagy az elektronok kis energiája, vagy a többszörös szórás zavaró hatása miatt. Most látjuk, hogy az első kísérleteknél nem is helyesen várták az effektust, midőn 180° szerint periodikusan változó intenzitás-eloszlásra számítottak.

Legnagyobb részben azonban negatív eredménnyel végeztek azok a kísérletek is, melyeket MOTT elméletének az igazolására, az általa kiszabott feltételek lehető betartása mellett végeztek. E kísérletek közül legnevezetesebbek DYMOND, G. P. THOMSON, RICHTER és MYERS, BYRNE és COX vizsgálatai.

Az első három szerző kísérleteinek módszere igen hasonló. Mindegyik berendezésének elve a következő.

Finom rések által leszűkített elektronsugár (l. 4. ábra) az A forrásból a B



4. ábra.

aranylemezre esik és a derékszögben szórt sugarak egy újabb diafragmarendszeren át egy második aranylemezre (C) jutnak, melyet a BC irány, mint tengely körül lehet forgatni, úgy, hogy a D, vagy E felé szóródó sugár intenzitását lehet mérni. E célra DYMOND és THOMSON FARADAY-kalitkát, RICHTER pedig fotográfiai módszert alkalmazott.

DYMOND²¹ első kísérleteiben talált egy az elektronok energiá-

²¹ Proc. Roy. Soc. A 136, 638 (1932).

jától függő aszimmetriát, mely azonban lényegesen kisebb volt, mint a MOTT számításai alapján várt érték. Később kiderült, hogy az effektus oka a berendezésben rejlő aszimmetria volt, s azt kiküszöbölve azt találta, hogy 160 kV-os elektronoknál az aszimmetria nem több 1%-nál. Vizsgálataiban kimutatta, hogy a beeső sugárnak az a része, amely kétszeres szórást szenved, kb. akkora, mint MOTT szerint várható. A vizsgálatok eme része azért lényeges, mert az elmélet alapján kell kiszámítani a használandó lemez vastagságát, s ha már itt hiba van, akkor a további munka kárbaveszett.

THOMSON²² 30, 100 és 120 kV-os elektronokkal végezte kísérleteit. Szerinte az effektus nem lehet nagyobb a mérési hibánál (1%).

RICHTER²³ alapos megfontolások után az összes korábbi kísérletekben többé-kevésbbé fellelhető hibákat igyekezett kiküszöbölni. Az egyik hibaforrás a szóró lemezek nem kielégítő vékonysága. Ez u. i. többszörös szórást okoz, s több kis szög alatti rugalmas visszaverődés meghamisítja az eredményt. Egy másik, tisztán technikai, de igen fontos probléma a zavaró effektusok kizárása, főleg kóbor elektronok és a nagy energiájú elektronok hatására a készülék belsejében keletkező röntgensugárzás kiszűrése. Mindeme szempontokat figyelembevéve 20—120 kV-os elektronokkal végzett kísérletei teljesen negatív eredményre vezettek, annyira, hogy dolgozatában a MOTT-elmélet, sőt az ennek alapját képező DIRAC-elmélet helyességét is kétségbe vonja.

Lényegesen különbözik az előbbiektől MYERS, BYRNE és COX²⁴ kísérlete. Ők 80—225 kV-os elektronokat vékony arany sokkristálylemezen bocsátottak át, melyek diffrakciós képet hoztak létre egy fluoreszkáló ernyőn. Az ernyőre vágott finom lyukakon át egyes elhajlított nyalábok egy az elsőhöz hasonló második lemezre jutottak. A második lemez okozta diffrakciós képet fényképező lemezen vették fel és a kép intenzitáseloszlásában várták a polarizáció okozta aszimmetriát. Becslésük szerint, ha volt is valami

²² Phil. Mag. (7) 17, 1058 (1934).

²³ Ann. d. Phys. (V.) 28, 553 (1937).

²⁴ Phys. Rev. 46, 777 (1934).

aszimmetria, az nem haladhatja meg a 10 %-ot, sőt valószínűleg az 5 %-ot sem.

A negatív kísérleti eredményeknek az elmélettel való összeegyeztetése igen nehéz kérdés. Gondoltak arra, hogy egy *magon* való szórást tárgyaló elmélet nem fedheti *vékony lemezeken való* szórás kísérleti vizsgálatának eredményeit. Arra lehet gondolni, hogy atomon és kristályon való szóródás között alapvető különbség van. Ha van is azonban ilyen különbség, az inkább egyes atomok és végtelen kristályokra vonatkozik, márpedig a végtelen kristályokra érvényes meggondolásokat is alig lehet a kísérletekben tényleg szereplő lemezekre alkalmazni.²⁵ Sőt, közelebbi meggondolások azt mutatják, hogy a kísérletekben inkább az egyedülálló atom esete valósul meg.

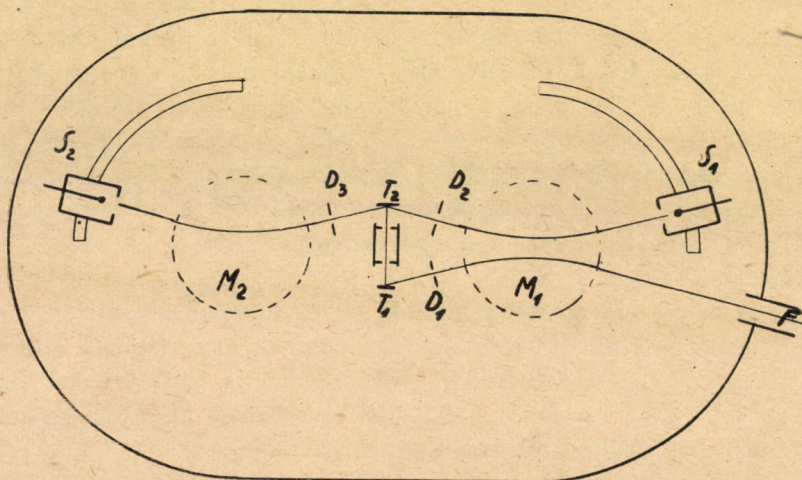
ROSE és BETHE²⁶ az elméleti és kísérleti eredmények közti ellenmondást különböző depolarizáló hatásokban kereste. Az első ilyen hatás az lehetne, hogy a beeső elektron *több kis* és csak *egy nagyobb* szög alatti szórást szenved, úgy, hogy ezek csak összesen tesznek ki 90°-ot. Ezeknek a kis szög alatti szórásoknak a depolarizáló hatása azonban igen kicsi. Például 100 kV-os beeső elektronoknál $2.5 \cdot 10^{-5}$ cm vastag aranylemez esetén 2.20%, míg a kísérleti eredmények értelmezéséhez 90—100 %-os depolarizációra lenne szükség. Másik esetleges depolarizációt előidéző jelenség: a *rugalmatlan* szórás. Ez egyrészt csökkenti a nagy szög alatti rugalmas szórás előtt az elektron energiáját, másrészt a rugalmatlan szórás közben megváltozhat az elektron spinje. Az első eset azonban egészen jelentéktelen, mert például DYMOND kísérleti körülményei között az összes energiavesztéség 1 kV. A számítások szerint az utóbbi jelenség okozta depolarizáció is csak néhány tized százalékot tesz ki. Egy harmadik számbajöhető hatás a *kicseréléses* szórás, vagyis az, hogy a beeső elektron atomi kötélékbe lép és helyette egy ellenkező spinű elektron lép ki. Ez a kicserélődés csak le nem zárt héjbéli elektronnal történhet meg, mert különben — ellentétben a

²⁵ G. P. THOMSON and COCHRANE: Theory and Practice of Electron Diffraction (London, 1939.) p. 320.

²⁶ Phys. Rev. 55, 277 (1939).

PAULI-elvvel — az atomban két egyenlő kvantumszámnégyesű elektron maradna vissza. Eme jelenségnél egy-egy aktusban a depolarizáció 100 %-os, de kimutatható, hogy e kicseréléses szórás bekövetkezésének igen kicsi a valószínűsége (100 kV-os elektronoknál $4 \cdot 10^{13}$ ütközés közül 1), s ezért hatása a kísérletekben teljesen elhanyagolható.

ROSE²⁷ a diszkrepancia megszüntetésére számításokat végzett arra az esetre, ha a szóró mag közvetlen környezetében nem COULOMB-féle a tér. Eredményei szerint azonban ez az út sem vezet az ellenmondások megszüntetésére.



5. ábra.

Vége 1939-ben KIKUCHI²⁸ rövid jelentést, majd egy évvel később részletes beszámolót közölt kielégítő eredménnyel végzett kísérleteiről. Vizsgálataiban, az előző szerzőkéhez képest, az a leglényegesebb újítás, hogy az egyenlő szög alatt, de ellenkező irányban szórt elektronsugár intenzitását egyszerre méri, továbbá, hogy az elektronsugár mágneses felbontásával az intenzitásmérésnél egy szűk energiaintervallumba eső elektronokból álló sugarat vesz figyelembe.

²⁷ Phys. Rev. 57, 280 (1940)

²⁸ Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 21, 524 (1939)

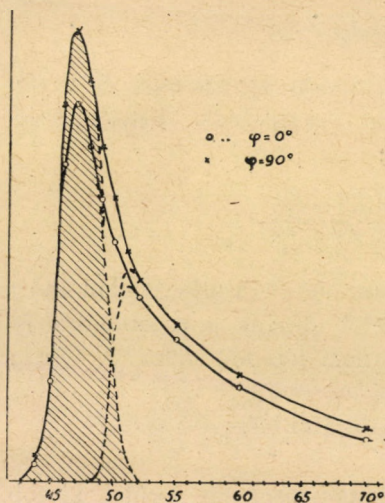
Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 22, 805 (1940).

Kísérleti berendezésének lényege a következő (5. ábra): F nagyfeszültségű elektronforrásból kilépő elektronokat az M_1 mágneses tér eltéríti eredeti irányából, és a D_1 résen át csak bizonyos meghatározott sebességű elektronok jutnak el a T_1 szórólemeze. Erről a lemeztől bizonyos (102°) szög alatt szórt elektronok egy diafragmarendszeren át jutnak a T_2 lemeze és itt diffúz szórást szenvednek. A D_2 , illetve D_3 rés a szórt elektronok közül csak az egyenlő nagy szög alatt, de ellenkező irányban szórt elektronokat bocsátja át, s az egyik sugár az előbbi M_1 , a másik pedig az M_2 mágneses térbe jut. A két mágneses tér egyenlő intenzitású és a $T_1 T_2$ sugárra szimmetrikus. A mágneses térből az elektronok egy-egy csúcsszámlálóba jutnak (S_1, S_2). A csúcsszámlálók fokbeosztásos körskála mentén mozgathatók. A mágneses tér a szórt elektronokat sebességük szerint szétválasztja, úgy, hogy a csúcsszámlálók különböző állásnál a szórt sugárban levő különböző energiájú elektronokat számlálják. A mágneses terek intenzitásából és a készülék méreteiből, adott számláló-beállítás esetén a számlálóba jutó elektronok energiája kiszámítható.

A mérés sikere szempontjából döntő fontossága van a segédberendezéseknek: a feszültség-stabilizálónak, az erősítőnek, a légszivattyúnak, s a berendezés konstrukciója ama részleteinek, melyek zavaró sugárzások felléptét igyekeznek megakadályozni. Ezekkel a kérdésekkel azonban itt ne foglalkozunk, s azokkal az elővizsgálatokkal sem, melyek a készülék szimmetrikus felépítése felől adnak felvilágosítást. A sikeres előkészületek után a végső mérés abban áll, hogy a csúcsszámlálók mozgatásával az elektronforrás különböző feszültségeinek megfelelő primer energiák mellett felvegyék a kétszer szórt elektronok energiaspektrumát.

A 6. ábra egy ilyen spektrumot mutat. Az elektronforrás feszültsége 72.4 kV, a két arany szórólemez vastagsága 10^{-3} cm, illetve 8.10^{-6} cm. Az abszcissza az a szög, melyet a csúcsszámlálót a megfelelő mágneses tér középpontjával összekötő egyenes és a két mágneses tér középpontját összekötő egyenes bezár, az ordináta pedig a 10 perc alatt számlált elektronok száma. 44° alatt az elektronok száma majdnem zérus, innét rohamosan

növekszik, majd egy maximumon túl csökken. (A görbe leszálló ága nem olyan meredek, mint a felszálló.) WAGNER²⁷ különböző vastagságú lemezeken szórt elektronok energia-spektrumát vizsgálva azt találta, hogy az intenzitáseloszlási görbe a vastagsággal igen lassan változik, s ebből azt következtette, hogy a szórás



6. ábra.

egy nagyon vékony felületi réteg okozza. KIKUCHI szintén használt különböző vastagságú lemezeket, s azt találta, hogy bármelyik lemez vastagsága elérheti a 10^{-3} cm-t, anélkül, hogy az intenzitás-eloszlás lényegesen változnék.

A kísérleti eredmény értelmezése végett célszerű a kapott intenzitáseloszlási görbét két tartományra osztani, szétválasztva az energiavesztés nélkül, és a tekintélyes energiavesztéssel szórt elektronoknak megfelelő görbedarabot. Az előbbieknek megfelelő görberész a GAUSS-féle hibagörbéhez hasonló alakú (ábrán vonalkázva). Tehát figyelembe véve a

beeső elektronok energiaingadozását, és az effektív lemezvastagságot, arra lehet következtetni, hogy az egyszerűen rugalmasan szórt elektronok esnek ebbe a tartományba, míg a másik területre az egyszerűen rugalmatlanul, vagy többszörösen kevert módon szórt elektronok esnek. Ha az előbbiek száma kisebb az utóbbiakénál, akkor az egész görbe maximuma eltolódik a kisebb energiák felé, mivel a «rugalmas» rész maximuma kisebb a «vegyes» rész maximumánál. Ez a jelenség például aluminium esetében tényleg tapasztalható.²⁷ Aranynál azonban KIKUCHI az egész görbe maximumát mindig az egyszerűs rugalmas szórásnak megfelelő energiaintervallumban találta.

Az eddigiek alapján rögtön belátható, hogy a mágneses ana-

²⁷ Phys. Rev. 35, 98 (1930).

lízis olyankor is kiadhat nagy aszimmetriát az ellenkező irányokban szórt sugarak intenzitásában, amikor az energiaspektrum felvétele nélkül semmi, vagy csak igen kicsi aszimmetria észlelhető. J_1 és J_2 legyen a két ellenkező irányban szórt sugár intenzitása. Ekkor a percentuális aszimmetria:

$$100 \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{2}(J_1 + J_2)}.$$

J_1 - és J_2 -ben azonban a rugalmasan egyszeresen és egyéb módon szórt elektronok egyaránt szerepelnek. Ezeket szétválasztva, a keresett aszimmetria:

$$100 \frac{J_1^{(e)} - J_2^{(e)} + J_1^{(i)} - J_2^{(i)}}{\frac{1}{2}(J_1^{(e)} + J_2^{(e)} + J_1^{(i)} + J_2^{(i)})},$$

ahol: $J^{(e)}$ az egyszeresen rugalmasan és $J^{(i)}$ a más módon szórt sugár intenzitása. Mivel az elmélet szerint a rugalmatlan és többszörös szórásnál aszimmetria nem lép fel, $J_1^{(i)} = J_2^{(i)}$, tehát:

$$100 \frac{J_1^{(e)} - J_2^{(e)}}{\frac{1}{2}(J_1^{(e)} + J_2^{(e)} + J_1^{(i)} + J_2^{(i)})} < 100 \frac{J_1^{(e)} - J_2^{(e)}}{\frac{1}{2}(J_2^{(e)} + J_2^{(e)})}.$$

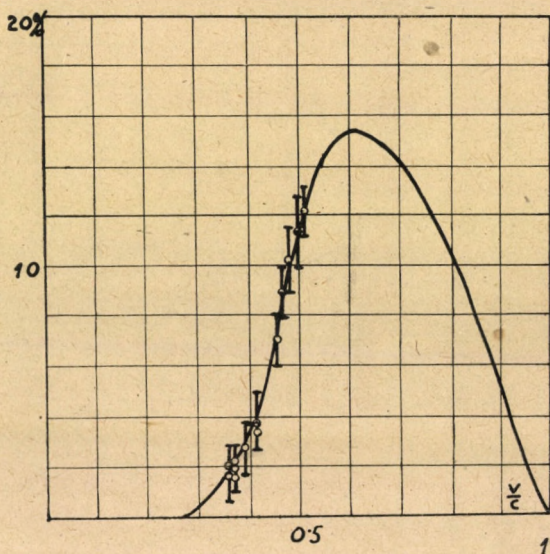
A valóságban a rugalmas szórásnak megfelelő terület kisebb a rugalmatlan szórásnak megfelelő területnél, úgyhogy a teljes szórás aszimmetriája sokkal kisebb lehet, mint a rugalmas szórásban fellépő aszimmetria.

Arany esetében a teljes eloszlási görbe maximuma mutatja a rugalmasan szórt elektronok számát. Ha tehát mindkét mágneses térnek ugyanaz a felbontása, akkor a maximumok nagyságából a polarizáció okozta aszimmetria meghatározható. A mérési görbe maximumából számított aszimmetria azonban műszerhibából eredő faktort is tartalmazhat. Mivel azonban elméleti alap nincs arra, hogy a rugalmatlanul szórt sugarak intenzitása függjön az azimuttól, az egyenlő szög alatt, de ellenkező irányban rugalmatlanul szórt elektronok számának egyenlőnek kell lennie. Vagyis a két görbének a rugalmatlan szórásnak megfelelő része kell hogy fedje egymást, ha nem így van, úgy annak oka magában a műszerben van. Mármost KIKUCHI feltételezi, hogy a műszer hibája rugalmasan és rugalmatlanul szórt elek-

tronoknál egyformán befolyásolja a mérés eredményét. Tehát a mérési görbéből a rugalmas szórás intenzitására nyert aszimmetria-értéket a rugalmatlan szórás aszimmetriájával korrigálta.

A mérési eredmények — mint a 7. ábra mutatja — MOTT elméleti eredményeivel 2%-on belül megegyeznek.

Az elmondottakat tehát a következőkben foglalhatjuk össze: az elektronpolarizáció vizsgálata azért fontos, mert ezzel a *szabad*



7. ábra.

elektronok spinjét lehet kimutatni. Olyan kísérlet azonban, mely az elektron nyomatékát valamilyen klasszikus elgondolás alapján közvetlenül akarja meghatározni, nem vezet célra. Az elektronpolarizáció kimutatására — DIRAC elmélete alapján — MOTT adott útmutatást. Ezen elmélet előírásait figyelembe véve több szerző folytatott kísérleti vizsgálatokat. Ezek közül KIKUCHINAK sikerült pozitív eredményre jutnia: mérései azt mutatják, hogy elektronpolarizáció van és kvantitativ megfelel az elmélet szerinti várakozásnak.

Faragó Péter.

ÜBER DIE POLARISATION DER ELEKTRONEN.¹

Nach Zusammenfassung der ersten experimentellen Ergebnisse, werden die Ausführungen von BOHR, dann die Theorie von DARWIN und die von MOTT kurz geschildert. Nachher weist der Verfasser darauf hin, wie verschiedene Forscher den von MOTT theoretisch erschlossenen Effekt experimentell bestätigen suchten. Nach der Darstellung der theoretischen Ausführungen die den Widerspruch zwischen Theorie und Experiment erklären wollten, wird über die neuesten Forschungen von KIKUCHI berichtet, die beweisen, dass die gesuchte Erscheinung wirklich existiert und quantitativ den theoretischen Erwartungen entspricht.

P. Faragó.

¹ Vorgetragen im Colloquium des Institutes für Theoretische Physik der Peter Pázmány Universität in Budapest, am 13. März, 1942.

A KÉTATOMOS MOLEKULA TÁRGYALÁSA A KÉTCENTRUMMODELL NÉLKÜL.

Atomi rendszerekre vonatkozó minden elmélet elmaradhatatlan kísérője a modellszerűség. A tárgyalás kiindulási pontját képező egyszerű feltevések a jelenségek egy csoportjának leírására több-kevesebb hűséggel alkalmasak, de a modell alkalmazhatóságának területe korlátozott s a jelenségek keretének bővítésével szükségképpen elérkezünk az alkalmazhatóság határaihoz. A kétatomos molekulák tárgyalásával kapcsolatos kétcentrumrendszer modellje, mely a molekulát rögzített helyzetű atommagok terében mozgó elektronok összességének fogja fel, már igen hamar elérkezik alkalmazhatóságának határáig s az atomi mozgást is magábanfoglaló molekulaprobléma rá visszanyúló tárgyalása is korlátozott érvényességű.

Az atomi rendszerek szerkezetére vonatkozó összefoglaló tárgyalás után e dolgozat a molekula problémáját a kétcentrumproblémától mentesen, pusztán a kémiai kötés kvantummechanikai természetére vonatkozó vegyértékelmélet eredményeinek felhasználásával igyekszik felépíteni s ezt az eljárást állítja szembe a kétcentrumrendszerrel kapcsolatos megfontolásokkal. Az utolsó részben felsorolt tapasztalati eredmények teszik indokolttá a dolgozat célkitűzéseit.

Atomi rendszerek állapotai a kvantummechanikában, mint a végtelen dimenziós absztrakt tér vektorai jellemezhetők. A mérhető mennyiségeknek ezen tér lineáris operátorai felelnek meg s minthogy a lineáris operációk általában fel nem cserélhető műveletek, az operátoroknak megfelelő mennyiségek sem mérhetők mindig egyidejűleg. Az operátor által képviselt mennyiség lehetséges értékeit az operátor spektruma adja meg.

Az atomi rendszer vizsgálatánál felmerülő legfontosabb kérdés az energia lehetséges értékeinek meghatározása. A rendszer

stacioner Ψ állapotai, melyek az energia meghatározott értékének felelnek meg, a

$$H\Psi = E\Psi \quad (1)$$

egyenlettel határozhatók meg. Ψ a H energiaoperátor E sajátértékhez tartozó sajátvektora. Az energia által felvehető értékeket az E sajátértékek összessége, H pontspektruma, általában még nem meríti ki, hanem az energiaspektrumhoz folytonos rész is tartozik.

Az x, y, z konfiguráció-tér $(-\infty, +\infty)$ szakaszán LEBESGUE szerinti értelemben négyzetesen integrálható $\phi(x, y, z)$ függvények függvénytere az absztrakt térrel kölcsönösen egyértelmű kapcsolatba hozható.¹ SCHRÖDINGER szerint egy elektron állapota leírható ezen függvénytér egy elemének, a $\phi(x, y, z)$ hullámfüggvénynek megadásával, a mérhető mennyiségek szerepét a megfelelő függvényoperátorok töltik be. A hullámmechanika utasítása szerint a mozgás dinamikus törvényszerűségére úgy jutunk, ha a klasszikus mechanika $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ HAMILTON-függvényében a p_x, \dots konjugált impulzuskomponensek helyébe a $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \dots$ differenciáloperátorokat írjuk; az energia sajátértékeit és a megfelelő stacioner állapotokat a

$$H\left(x, y, z, \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi(x, y, z) = E\phi(x, y, z) \quad (2)$$

hullámegyenlet szolgáltatja.

Két vagy több részből álló rendszer esetén a hullámmechanika utasítása csak annyiban módosul, hogy az állapotok leírására szolgáló függvénytér a megfelelő nagyobb dimenziószámú konfigurációtér $\phi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_f, y_f, z_f)$ hullámfüggvényeiből épül fel és a kiindulásul szolgáló klasszikus HAMILTON-függvényt is ezen konfigurációtér figyelembevételével kell felírni. Tekintettel azonban részint a konfigurációtér koordinátáinak geometriai jelentésére, melynek következtében az alapul szolgáló koordinátarendszer forgatása az x_i, y_i, z_i koordinátahármasok azonos transzformációjával jár, részint az elektronok elvileg megkülönböztethetetlen voltára, ami az elektronokat jellemző koordinátahármasok felcserélésére vonatkozólag a hullámfüggvény bizonyos

¹ NEUMANN, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. 1932

szimmetriatulajdonságait írja elő, az atomi rendszer állapotának megadására a konfigurációtér függvényeinek csak speciális osztályai alkalmasak és a függvényeknek e speciális osztályai alkotják a kvantummechanikai problémák tárgyalására szolgáló absztrakt teret.

A viszonyokat jobban megvilágítja a kompozíció módszere, mely az egyes részek állapotát leíró absztrakt terekből kiindulva építi fel a több részből álló rendszerre jellemző teret. Az eljárást egyszerűség kedvéért véges dimenziós terekkel szemléltetve, jellemezze az első rész állapotát az S_n n -dimenziós tér \mathbf{a} : (a_1, a_2, \dots, a_n) vektora, a másodikét a T_n n -dimenziós tér \mathbf{b} : (b_1, b_2, \dots, b_n) vektora és képezzük a $c_{ik} = a_i b_k$ alakú szorzatokat. n^2 ilyen szorzat lévén, így az n^2 -dimenziójú $S_n \times T_n$ vektortérre jutunk, melynek $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektora a két részből álló rendszerre nézve jellemző. Ha az S_n, T_n terek vektorait ugyanazon $\mathbf{a}' = U\mathbf{a}$, $\mathbf{b}' = U\mathbf{b}$ transzformációnak vetjük alá, az $S_n \times T_n$ tér $\mathbf{c}' = (U \times U)\mathbf{c}$ alapján transzformálódó vektorának $a_i b_k$ komponensei, mint az n -dimenziós tér másodfokú tenzorának komponensei transzformálódnak és így a két részből álló rendszer állapotát az n^2 -dimenziós tér vektora helyett az n -dimenziós tér másodfokú tenzorával is jellemezhetjük. Ha az egyes részek állapotterében az U transzformációt például a háromdimenziós tér koordinátarendszerének forgatása idézi elő, akkor az állapotter másodfokú tenzorának, mint az egyesített rendszer állapotának, transzformációja már automatikusan kifejezésre juttatja azt, hogy az egyes részek állapotterében a forgatás által előidézett transzformáció ugyanaz.

f részből álló rendszer esetén az állapotter f -edfokú tenzorai lépnek fel, az összetett rendszer állapota az egyszerű rész állapotterének n -dimenziós volta esetén az n -dimenziós tér f -edfokú tenzorával, vagy az f -edfokú tenzorkomponensek n -dimenziós vektorterének vektorával jellemezhető. Végtelen dimenzió esetén az állapotokat jellemző egységnyi hosszúságú, normált vektorok kompozíciója véges normájú tenzorokat eredményez¹ s ezek tere az absztrakt térre egyértelmű módon leképezhető.²

² STONE, Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis. 1932. 67. o.

Így az f részből álló rendszert a kvantummechanikai állapotok végtelen dimenziós tere esetén is a tér f -edfokú tenzorai jellemzik.

Egyszerű alakot ölt a kompozíció módszere függvényterek kompozíciója alkalmával, mert az $f_1(x_1, y_1, z_1)$, $f_2(x_2, y_2, z_2)$ hullámfüggvények által jellemzett állapotú részek kompozíciója egyszerűen az $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = f_1(x_1, y_1, z_1) \cdot f_2(x_2, y_2, z_2)$ hullámfüggvényt szolgáltatja, mint az eredő rendszer állapotát. Az eredő rendszer állapotának tenzorjellege itt az x_i, y_i, z_i koordinátahármasok szerepében mutatkozik.

A SCHRÖDINGER-elmélet, mely az atomi rendszer állapotát egyetlen skalár hullámfüggvénnyel írja le, az atomok színeképének finomabb szerkezetéről már nem tud számot adni. Ennek magyarázatához az elektronspin fogalmára van szükség s ennek bevezetése céljából a PAULI-elmélet álláspontján az elektron állapotát nem egyetlen $\phi(x, y, z)$ hullámfüggvénnyel, hanem a $\Psi = \phi_1(x, y, z)u_1 + \phi_2(x, y, z)u_2$ kétdimenziós vektorhullámfüggvénnyel kell jellemezni. Ezeknek tere a kvantummechanikai állapotok leírására szolgáló állapotter. A térbeli koordinátarendszer forgatása az u_1, u_2 alapvektorok meghatározott $D_{1/2}$ lineáris transzformációját idézi elő és az állapotternek Ψ komponenseit egymással felcserélő operátorai az elektronspinnel kapcsolatosak.³ A térbeli koordinátarendszer megfelelő választása esetén a $\phi_2 = 0$ állapot valamely koordinátatengely irányában az elektronspinkomponens $+\frac{1}{2}$, $\phi_1 = 0$ a spinkomponens $-\frac{1}{2}$ értékének felel meg. A kétdimenziós vektorhullámfüggvények tere matematikailag a kétdimenziós spin-tér és végtelen dimenziós függvényter kompozíciójának is tekinthető.

Az f elektront tartalmazó atom állapota az elektronállapotok kompozíciójának megfelelően 2^f skalár hullámfüggvény megadásával jellemezhető,

$$\Psi = \sum_{r=1}^{2^f} \phi_r(x_i) \alpha_r, \quad (3)$$

ahol $\alpha_r = u_1 \cdot v_1 \dots v_r$ és u_1, u_2 az első elektron kétdimenziós spin-terének alapvektora, v_1, v_2 a másodiké, s. i. t. α_r -hez vala-

³ HILL—LANDSHOFF, Rev. Mod. Phys., 10, 88, 1938.

mely térbeli irány mentén a spinkomponensek meghatározott értékei tartoznak. A háromdimenziós tér forgatásai a spin-tér f -edfokú α , tenzorkomponensei között a $D_{1/2} \times D_{1/2} \times \dots \times D_{1/2}$ transzformációt hozzák létre. A tenzorkomponensek $2f$ -dimenziós tere ezen transzformációkkal szemben invariáns alterekre bontható, melyek az eredő spin S értékéhez tartoznak és az atomtermekek $2S + 1$ multiplicitású osztályokra választják. A $2S + 1$ dimenziós alterek állapotai az atom eredő spinjének valamely rögzített irány mentén vett $M_S = S, S - 1, \dots, -S$ értékei szerint osztályozhatók. S páros számú elektron esetén pozitív egészszám vagy zérus, $\frac{1}{2}$ páros számú, páratlan számú elektron esetén $\frac{1}{2}$ páratlan számú többszöröse.

A PAULI-elmélet felfogásában maga az energiaoperátor is függ a spinoperátoroktól, mégpedig, minthogy a spinnek klasszikus megfelelője nincsen, a klasszikus mechanikára vissza nem vezethető módon. Az atom szerkezetének közelítő leírása céljából azonban eljárhatunk úgy is, hogy a leírás módjának a spin következtében való megváltozását ugyan figyelembe vesszük, de az energiának a spintől való függését elhanyagoljuk. Ebben az esetben a $\phi_r(x_i)$ hullámfüggvények egyenként is eleget tesznek a SCHRÖDINGER-egyenletnek. A SCHRÖDINGER-egyenlet a térbeli koordinátarendszer forgatásaival szemben invariáns s így a meghatározott E energiaértékhez tartozó véges számú $\phi_r(x_i)$ hullámfüggvény ezen forgatások alkalmával egymás között transzformálódik. A forgatásokkal szemben való invariancia az L pozitív egész vagy zérus kvantumszám fellépésében is kifejezésre jut, mely $\frac{h}{2\pi}$ -vel szorozva az atom eredő forgási pályaimpulzusának az E energiájú állapotokhoz tartozó értékét is adja. A SCHRÖDINGER-egyenlet E -hez tartozó sajátfüggvényeinek száma ebben az esetben $2L + 1$ s az állapotokhoz még az eredő forgási pályaimpulzusnak valamely rögzített irányban vett $M_L = L, L - 1, \dots, -L$ komponensét rendelhetjük.

Az energia spintől való függésének tekintetbe vételével az L, S kvantumszámok elvesztik szigorú jelentésüket s a térbeli forgatásokkal szemben mutatkozó invariancia az eredő forgási impulzusnak megfelelő J belső kvantumszám által jut kifeje-

zésre és ennek $M_J = J, J-1, \dots, -J$ komponensei lépnek fel. Az atomtermeket a spintagok hatásának figyelembe vétele nélkül osztályozva S, P, D, \dots betűkkel jelöljük, az $L = 0, 1, 2, \dots$ értékeknek megfelelően, míg a spinmultiplicitást balfelső index jelzi. 3P tehát $L = 1, S = 1$ -gyel jellemzett triplett atomtermet jelent.

Két elektron szerepének felcserélése az atomi rendszer állapotát jellemző f -edfokú tenzor komponenseinek transzformációjában nyilvánul meg. Az elektronok permutációja az állapotterben transzformációkat hoz létre s az állapotok ezen transzformációkkal szemben invariáns szimmetriaosztályokba sorozhatók. Tekintettel az elektronok megkülönböztethetetlen voltára, az atomi rendszerrel kapcsolatban megnyilvánuló minden külső hatás a rendszer elektronjait egyformán, szimmetrikusan érinti, az energiaoperátor az elektronokban szimmetrikus s így ha a rendszer egyszer valamilyen szimmetriájú állapotban volt, úgy minden körülmény között abban is marad. Az elektronokra nézve a természet az antiszimmetrikus állapotok osztályát tünteti ki, PAULI elvének általános fogalmazása szerint az f elektronból álló rendszer állapota f -edfokú antiszimmetrikus tenzorral jellemezhető, melynek komponensei a két elektron szerepének felcserélése esetén -1 -szeresükbe mennek át.

Tekintettel azonban arra, hogy az állapotoknak a spintől és helykoordinátáktól való függése matematikailag különválasztott alakban lép fel és a hullámfüggvényeknek pusztán a helykoordinátáktól vagy spintől való függése még nem mutat szükségképpen antiszimmetriát, célszerű általában azoknak a szimmetriaosztályoknak vizsgálatát, melyek f elem permutációjával kapcsolatban felléphetnek. Ha az állapotot jellemző vektorhullámfüggvény (3) alatti alakját nézzük, közvetlenül láthatjuk, hogy az a követelmény, hogy két elektron szerepének, tehát koordinátáinak és a spinkomponenseknek, egyidejű felcserélése esetén a vektorhullámfüggvény -1 -gyel szorozódjék, magukra a hullámfüggvénykomponensekre nézve is bizonyos szimmetriakövetelményeket ír elő.

Legyen T az n -dimenziós tér f -edfokú tenzora⁴ és ST az a

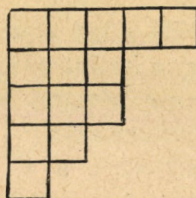
⁴ WEYL, Gruppentheorie und Quantenmechanik. 1931.

tenzor, mely úgy jön létre, hogy T komponenseinek f indexét valamely s permutációnak vetjük alá. Legyen $\delta_s = \pm 1$ aszerint, hogy az s permutáció páros vagy páratlan számú lépésben hajtható végre. Az indexek közötti összes lehetséges permutációt végrehajtva a $\sum_s s$ operátor a szimmetrizáció jól ismert eljárásával T tenzorból szimmetrikus f -edfokú tenzort állít elő, míg a $\sum_s \delta_s s$ operátor a megfelelő antiszimmetrikus tenzorra vezet.

Az f -edfokú tenzorok többi szimmetriaosztályának előállítására céljából YOUNG és FROBENIUS nyomán bontsuk f -et

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_i \quad f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_i$$

részekre s a felbontás szemléltetésére rajzoljunk olyan négyzetes sémát, (1. ábra), melynek első sora f_1 , második sora f_2 , s. i. t., mezőt tartalmaz. A séma mezőibe valamilyen módon gondoljuk beleírva az $1, 2, \dots, f$ számokat. Ha p tetszősszerű permutáció, mely azonban a séma két különböző sora között elemet egymással fel nem cserél, az



1. ábra.

$$a = \sum_p p$$

szimmetriaoperátor egy tetszőleges tenzort bizonyos fokig szimmetrizál. Ha viszont a q permutáció az f számú elem közül csak a séma azonos oszlopában álló elemeket cseréli fel egymással, a

$$b = \sum_q \delta_q q$$

operáció az antiszimmetrizálást hajtja bizonyos fokig végre. A két műveletet egymás után végrehajtó

$$c = \sum_{p, q} \delta_q qp$$

operátor a megfelelő sémához tartozó YOUNG-féle operátor.

Mint az kimutatható, c számtényezőtől eltekintve az f -edfokú tenzorok terének projekciós operátora, melynek tartománya az indexek felcserélésével szemben invariáns s a tenzoroknak

tovább nem növelhető szimmetriájú osztályát határozza meg. Különböző sémák különböző szimmetriájú osztályokra vezetnek.

Az $f > n$ esetben csak azokhoz a sémákhoz tartozó szimmetriaosztályok tartalmazzák a zérus elemen kívül az n -dimenziós tér f -edfokú tenzorait, melyeknek oszlopai legfeljebb n -hosszúságúak. Speciálisan az $n = 2$ esetben tehát az oszlopok legfeljebb két mezőből állhatnak, különben a megfelelő YOUNG-féle operátor minden tenzort a zérustenzorba visz át. Minthogy ugyanis a tenzorkomponensek indexei csak két különböző értéket vehetnek fel, a három mezőből álló oszlop három mezéjének megfelelő indexek közül legalább kettő megegyezik s a kérdéses oszlop szerinti antiszimmetrizációt először azokon a permutációkon keresztül hajtva végre, amelyek a megegyező két indexet nem cserélik fel, azután az ezek felcserélésének megfelelő permutációkat is elvégezve, minden tag kétszer fordul elő, ellenkező előjellel a két azonos index felcserélésének megfelelően.

Igy a kétdimenziós spin-tér f -edfokú tenzorainak szimmetriaosztályai kétsoros szimmetriasémákkal jellemezhetők. Az első sor tartalmazzon $l + v$, a második l elemet. Minden szimmetriaosztály tehát a $v = f - 2l$ számmal jellemezhető, ahol v az f , $f - 2$, $f - 4, \dots$ értékeket veheti fel. Minthogy az f elektronból álló rendszerre nézve a térbeli koordináta-rendszer forgatásai és az elektronok szerepének permutációja egymással sorrendre nézve felcserélhető műveletek, a spin-tér f -edfokú tenzorai a térbeli forgatásokkal és az elektronok permutációjával szemben egyaránt invariáns osztályokba sorozhatók. Mint az kimutatható, a spin-tér S eredő spinkvantumszámmal jellemzett és a térbeli forgatásokkal szemben invariáns $2S + 1$ multiplicitású tenzorosztálya azonos a $v = 2S$ számmal jellemzett szimmetriaosztállyal. A v számot az atom vegyértékének nevezve, a $v + 1$ spinmultiplicitású atomtermek vegyértéke v .

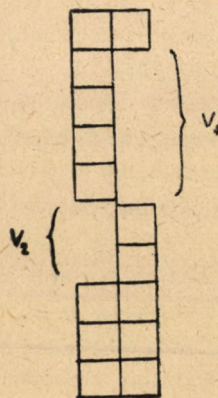
Az energiaoperátornak a spintől való függését elhanyagolva, az atomtermek a $v = 2S$ szimmetriaosztállyal jellemzett, szigorúan meghatározott, spinmultiplicitáshoz tartoznak. Kimutatható, hogy abból a célból, hogy a spin-tér és a hullámfüggvény-tér kompozíciója alkalmával keletkező állapotter hullámtenzora antiszimmetrikus legyen, ebben az esetben a SCHRÖDINGER-

egyenletnek eleget tevő $\psi_i(x_i)$ hullámfüggvénykomponenseknek a megfelelő transzponált sémával jellemzett szimmetriaosztályba kell tartozniok, melynek két oszlopa közül az elsőben $l + v$, a másodikban l mező van. Az f elektron szerepének a hullámfüggvénykomponensekben való felcserélése ezen séma szerinti szimmetriát kell, hogy mutasson.

LONDON azon felismerésének⁵ szemléltetésére, hogy v valóban az atom kémiai vegyértékével áll kapcsolatban, vegyünk most két f_1 , illetve f_2 elektrontól álló atomot s egyesítsük ezeket $f = f_1 + f_2$ elektront tartalmazó molekulává. Az első atom $\psi_{1r}(x_i)$ és a második atom $\psi_{2s}(x_k)$ hullámfüggvénykomponenseit jellemző szimmetriaosztályok kompozíciója az egyesített rendszer meghatározott szimmetriaosztályaira vezet, melyek közül az itt tekintetbe jövők meghatározására eljuthatunk a spin-tér megfelelő szimmetriaosztályainak kompozíciója révén is. A spin-tér v_1 , illetve v_2 számokkal jellemzett szimmetriaosztályainak kompozíciója egyben a forgatásokkal szemben invariáns S_1 , illetve S_2 spinkvantumszámú osztályok kompozícióját is jelenti s az eredő rendszernek a szimmetriatranszformációkkal szemben invariáns osztályait a forgatásokkal szemben invariáns és a

$$v_1 + v_2, v_1 + v_2 - 2, \dots, |v_1 - v_2| \quad (4)$$

számokkal jellemzett szimmetriaosztályok alkotják. Az egyesített rendszer SCHRÖDINGER-féle hullámfüggvényei ugyancsak a megfelelő transzponált sémákhoz tartozó szimmetriaosztályokkal jellemezhetők, míg a hullámfüggvények terének kompozíciója folyamán adódó egyéb szimmetriaosztályok, melyeknek sémája kettőnél több oszlopot tartalmaz, a PAULI-elv értelmében nem jönnek tekintetbe. Ha a két atom hullámfüggvényeinek szimmetriasémáit egymás felett képzeljük elhelyezve, (2. ábra), a különböző kötési állapotokat (4) szerint a két séma egy-egy mezővel való összetolásával jelle-



2. ábra.

⁵ LONDON, Z. f. Phys. 46, 455, 1928.

mezhetjük. Ez a folyamat a szabad vegyértékek lekötésének s a szimmetriaosztályok ezen megvilágításában a szabadelektronspinek telítődésének felel meg. A vegyérték fogalmának ezt az értelmezését csak az a körülmény korlátozza meglehetősen, hogy az atomállapotok csak a spinkölcsönhatások elhanyagolása esetén tartoznak szigorúan meghatározott spinmultiplicitáshoz.

A periódusos rendszer szabályszerű felépítettségének megértésére célszerű az atom elektronjainak mozgását egymástól függetlennek tekinteni, ami a köztük való kölcsönhatás elhanyagolásával vagy valamilyen középérték formájában történő figyelembevételével vihető keresztül. Ebben az esetben az atom állapotaihoz az egyes elektronok meghatározott állapota tartozik s az elektronállapotokat meghatározott n, l, m_l, m_s kvantumszámok jellemzik. Az n főkvantumszám, az $l < n$ forgási kvantumszám, az $m_l = l, l-1, \dots, -l$ mágneses kvantumszám és az $m_s = \pm \frac{1}{2}$ spinquantumszám. l, m_l, m_s az elektronok állapotait a térbeli forgatásokkal szemben mutatkozó invariáns tulajdonságok szerint osztályozza s az elektronok terének kompozíciója az ezekből meghatározható L, M_L, S szimbólumokhoz vezet, melyeknek jelentése megmarad akkor is, ha az elektronok közötti kölcsönhatást már figyelembe vesszük. Ebben a felfogásban PAULI elve, mely az eredő hullámfüggvény antiszimmetriáját kívánja meg, úgy is fogalmazható, hogy az atom két elektronjának mind a négy n, l, m_l, m_s kvantumszáma egyidejűleg meg nem egyezhetik, két elektron ugyanazon állapotban nem tartózkodhatik. Ezért nem lehetnek az atom elektronjai mind a legalacsonyabb energiájú $n=1, l=0$ állapotban sem és adott n, l kvantumszámú állapotban legfeljebb $2(2l+1)$ elektron található. Az összes n, l kvantumszámú állapotok betöltöttsége esetén azok összessége kifelé gömbszimmetriát mutat s az így fellépő zárt elektronhéjak az atom látható szinképeinek energianívóit csak kevésbé befolyásolják. A nívók számát és L, M_L, S kvantumszámait egyedül a zárt héjakon kívül elhelyezkedő elektronok határozzák meg, ezek játszanak közre a spinmultiplicitás és a kémiai vegyérték kialakulásában is. Így mutathatnak a periódusos rendszer ugyanazon oszlopában álló elemek a legkülső elektronok azonos száma következtében hasonló atomszinképet és

kémiai viselkedést. Ha az atomállapot nem rendelkezik meghatározott spinmultiplicitással, a külső elektronok kvantumszámainak megadása az atom viselkedését jobban jellemezheti, mint a spinmultiplicitás közelítő értéke. Megemlíthető még, hogy, ha a külső elektronok például mind meghatározott n, l kvantumszámhoz tartoznak, ez az atom SCHRÖDINGER-függvényeinek egy $2l+1$ dimenziós térre való korlátozódását jelenti s így az azokhoz tartozó szimmetriasémák oszlopai legfeljebb $2l+1$ mezőt tartalmazhatnak. Például $4l$ külső elektront tartalmazó atom vegyértéke így nem lehet $4l, 4l-2, \dots, 2, 0$, hanem csak 2 vagy 0 s ez a körülmény magyarázza meg, hogy az elektronhéjak vegyértéke bizonyos számú elektron fellépése után újra csökken.

Az elektronból és atommagból álló atomot az atommag viszonylag nagy tömege folytán közelítőleg felfoghatjuk, mint a rögzítettnek képzelt atommag külső erőterében mozgó elektronok összességét. Ezzel a képpel dolgoznak általában az atomra vonatkozó számítások, de a pontosabb számításnak tulajdonképpen figyelembe kell vennie az atommag mozgását is. Ebben a felfogásmódban a mozgó atommag koordinátái is belekerülnek a hullámegyenletbe és a mozgást megfelelő koordinátatranszformációval felbonthatjuk az atomtömegközéppont mozgásának megfelelő külső mozgásra és az atom elektronjainak a tömegközéppontra viszonyított belső, relatív mozgására. Pusztán atomi probléma esetén szokásosabb a belső mozgást magára az atommagra, mint középpontra vonatkoztatni. A tömegközéppont mozgása az atom energiájához csak állandó értékkel járul hozzá és az atom belső energiaállapotára nézve nem bír jelentőséggel. Az atom állapotát meghatározó belső mozgás egyenlete viszont kissé eltér a rögzített atommag külső erőterében mozgó elektronok egyenletétől és az így adódó finomabb különbségek valóban észlelhetők például a H és He^+ atom BALMER és PICKERING-vonalainak eltolódásában.^{6, 7}

Az atommagok mozgásának fokozott jelentőség jut akkor, ha

⁶ SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien I. 1931.

⁷ SOMMERFELD, „ „ „ II. 1939.

a kétatomos molekula mozgását akarjuk felépíteni az alkotó atomok mozgásának kompozíciójával. Az atomok mozgását a tömegközéppontra vonatkoztatott belső és a tömegközéppont mozgása által meghatározott külső mozgásra bontva, a kompozíció alkalmával a külső mozgásoknak is szerep jut s a molekula szempontjából azok mint belső mozgások jelentkeznek. A két atom tömegközéppontjának mozgását megfelelő koordinátatranszformációval megint felfoghatjuk, mint a molekula tömegközéppontjának megfelelő külső mozgás és az atomok relatív helyzetéből adódó belső mozgás eredőjét s a molekula belső állapota szempontjából érdektelen külső mozgás figyelmen kívül hagyásával fennmaradó belső mozgás szolgál a molekula állapotainak meghatározására. A kompozíció révén adódó állapotter hullámfüggvényei tehát az elektronoknak a két atom tömegközéppontjára vonatkoztatott adatain kívül az atomok tömegközéppontjának egymásra viszonyított, relatív koordinátáit is tartalmazzák.

A molekula problémájának matematikai bonyolultsága következtében az energiaoperátornak a spintől való függését kezdetől fogva általánosságban feltételezni teljesen illuzórikus eljárás s a spintől való függés legfeljebb az annak elhanyagolása után adódó megoldások utólagos perturbációszámítása révén vehető figyelembe. Az elektronspinnek a kémiai kötés és a színeképek szempontjából játszott fontos szerepe folytán azonban célszerű legalább formailag tekintetbe venni a spin létezését s a molekula állapotait ennek megfelelően vektorhullámfüggvényekkel jellemezni. A színekép finomabb szerkezetében néha mutatkozó magspin szerepét azonban már figyelmen kívül hagyjuk s így az f elektront tartalmazó molekula állapotát (3)-hoz hasonlóan $2f$ komponensű vektorhullámfüggvénnyel jellemezzük. Nem foglalkozunk a továbbiakban azokkal a különbségekkel sem, melyek azonos atommagok esetén az atommagok megkülönböztethetetlen volta következtében fellépő újabb szimmetriaviszonyok folytán jelentkeznek. Az állapotok vektoriális jellegét viszont csak a vastagított jelölésben juttatjuk kifejezésre s így például a Ψ, Φ szimbólumon a vektorhullámfüggvények skaláris szorzatát, a megfelelő komponensek szorzatösszegét értjük. A $2f$ hullámfüggvénykomponens adott feltételek mellett ugyancsak eleget

tesz a SCHRÖDINGER-egyenletnek. Meg kell azonban jegyezni, hogy szemben a molekula tárgyalásával kapcsolatban gyakran található állítással,^{8,9} ez a helyzet általában éppen csak akkor lép fel, ha az energiaoperátor már nem függ a spinoperátoroktól.

A kétatomos molekula hullámeqyenlete az atommagok és elektronok mozgási energiájának, valamint a részek között ható potenciális energiáknak figyelembevételével

$$\{T_I + T_{II} + \Sigma T_i' + V\} \Psi = E \Psi \quad (5)$$

alakba írható, ahol a I, II index az atommagok, i az elektronok koordinátáira vonatkozik,

$$T_I = -\frac{h^2}{8\pi^2 M_I} \Delta_I, \quad T_{II} = -\frac{h^2}{8\pi^2 M_{II}} \Delta_{II},$$

$$T_i' = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta_i', \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

M_I, M_{II} az atommagok, m az elektronok tömege. A V potenciális energia tartalmazza részint a különálló atomokban is felépő V_1, V_2 potenciális energiákat, részint a mindkét atom elektronjainak és atommagjainak helyzetétől függő V_{12} kölcsönhatási tagokat. A potenciális energiák szempontjából az atomok tömegközéppontjának koordinátáit az atommagok koordinátaival azonosnak vehetjük. A koordináták valamely tehetetlenségi koordinátarendszerre vonatkoznak és az elektronok koordinátáit ebben a rendszerben vesszős jelöléssel gondoljuk ellátva.

A molekula atomokból való felépülésének kifejezésre juttatása céljából bevezetjük az atomok tömegközéppontjainak koordinátáit és az elektronoknak az atomok tömegközéppontjára vonatkoztatott belső koordinátáit. Az atomtömegközéppontra nézve

$$X_1 = \frac{m}{M_1} \sum_{i=1}^{f_1} x_i' + \frac{M_I}{M_1} X_I,$$

az elektronok belső koordinátáira nézve

$$x_i = x_i' - X_I,$$

⁸ VAN VLECK, Phys. Rev., **33**, 471, 1929.

⁹ KRONIG, Band Spectra and Molecular structure. 1930.

$M_1 = M_I + f_1 m$ az f_1 elektront tartalmazó atom tömege és hasonló egyletek érvényesek az y, z tengelyek mentén is, valamint az indexek átjelölésével a második atomra vonatkozólag is. A koordinátákra vonatkozó transzformációs egyenletek alapján

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{m}{M_1} \left(\frac{\partial}{\partial X_1} - \sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1} = \frac{M_I}{M_1} \left(\frac{\partial}{\partial X_1} - \sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

és ezek révén

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} + \frac{1}{M_1} \frac{\partial^2}{\partial X_1'^2} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{M_1} \left(\sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{M_1} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2}. \quad (6)$$

Az összefüggést mindhárom koordinátatengely mentén felírva és összegezve, az atom kinetikus energiájának transzformációs képletére jutunk. Az egyenlőség jobboldalának első tagja az elektronok belső mozgásának a magmozgás tekintetbevétele nélkül adódó mozgási energiáját eredményezi.

$$\sum_{i=1}^{f_1} T_i = - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \sum_{i=1}^{f_1} \Delta_i. \quad (7a)$$

A második tag az atommag mozgásának figyelembevételével adódó korrekciót képviseli, mely az eredményeket a spinkorrekcióknál is kisebb mértékben befolyásolja és melyet a továbbiakban elhanyagolunk.

$$T_{c1}^* = \frac{h^2}{8\pi^2 M_1} \left[\left(\sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{f_1} \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 \right]. \quad (7b)$$

A harmadik tag az atom külső mozgásának megfelelő mozgási energiára vezet a tömegközéppont koordinátaiban.

$$T_1 = - \frac{h^2}{8\pi^2 M_1} \Delta_1. \quad (7c)$$

A transzformációt mindkét atomra elvégezve, tehát

$$T_I + T_{II} + \sum_{i=1}^f T_i' \rightarrow T_1 + T_2 + \sum_{i=1}^{f_1} T_i + \sum_{k=1}^{f_2} T_k.$$

A V_1 , V_2 potenciális energiák a transzformáció után csak az elektronok belső x_i , illetve x_k koordinátáitól függenek, míg V_{12} ezenkívül a két atomtömegközéppont relatív $X_r = X_1 - X_2$ koordinátáit is tartalmazza.

Az atomtömegközéppontok koordinátái helyett a molekula tömegközéppontjának koordinátáit és az atomtömegközéppontok egymásra vonatkoztatott, relatív koordinátáit, valamint a μ redukált tömeget bevezetve,

$$MX_0 = M_1 X_1 + M_2 X_2, \dots, X_r = X_1 - X_2, \dots, M = M_1 + M_2, \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$$

alapján, ez a transzformáció az energiaoperátornak csak T_1 , T_2 tagjait érinti,

$$T_1 + T_2 \rightarrow T_0 + T_r, \quad T_0 = -\frac{h^2}{8\pi^2 M} \Delta_0, \quad T_r = -\frac{h^2}{8\pi^2 \mu} \Delta_r.$$

Az energiaoperátornak a molekula tömegközéppontjának koordinátáitól való függését csak T_0 tartalmazza s így a hullámfüggvényeknek ezektől való függése egy közös $\chi(X_0, Y_0, Z_0)$ tényező alakjában vehető figyelembe, ahol χ a $\Delta_0 \chi + k^2 \chi = 0$ egyenletnek tesz eleget és jelenléte az energia skáláját csak az állandó $\frac{h^2 k^2}{8\pi^2 M}$ értékkel tölja el. Az egyenlet az erőmentes térben mozgó M tömegű rész hullámegyenlete, melytől a molekula állapotai szempontjából a továbbiakban eltekinthetünk.

Az atomtömegközéppontok relatív X_r , Y_r , Z_r koordinátái helyett r , ϑ , φ polár koordinátákat is vezethetünk be s akkor a jól ismert transzformáció szerint⁷

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_r \quad (8a)$$

$$\Delta_r = \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (8b)$$

Az egyes atomok

$$H_1 = \sum_{i=1}^{f_1} T_i + V_1, \quad H_2 = \sum_{k=1}^{f_2} T_k + V_2$$

energiaoperátorainak bevezetésével végül a molekula hullám-egyenlete

$$\left\{ -\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \Delta_r(r, \vartheta, \varphi) + H_1(x_i) + H_2(x_k) + V_{12}(x_i, x_k, r, \vartheta, \varphi) \right\} \Psi(x_i, x_k, r, \vartheta, \varphi) = E\Psi(x_i, x_k, r, \vartheta, \varphi). \quad (9)$$

A választott térbeli koordináta-rendszerek irányától a hullám-egyenlet alakja és az energia sajátértékei nem függhetnek s a molekula állapotai a forgatásokkal szemben invariáns osztályokba tartoznak. A forgatásokkal szemben invariáns alterek a J forgási kvantumszámmal jellemezhetők s a megfelelő állapotokhoz az energiával felcserélhető forgási impulzusoperátor négyzetének $J(J+1)\frac{h^2}{4\pi^2}$ sajátértékei tartoznak. A J kvantumszámon kívül az állapotok \pm szimmetriával jellemezhetők a jobbrendszerű derékszögű koordináta-rendszerről balrendszerű koordináta-rendszerre való áttérés alkalmával mutakozó invarianciatulajdonság szerint. A $\frac{2\pi}{h}$ -val szorzott forgási impulzus operátora $L = L_0 + L'$ alakba írható, ahol az operátorösszegezés vektoriálisan értendő és L_0 az atomtömegközéppontok relativ mozgása folytán adódó forgási impulzus, L' pedig az elektronok belső mozgásánál fellépő forgási impulzusok eredője. Az összefüggések egyformán érvényesek a spin tekintetbevételével vagy anélkül, csak a kifejezések matematikai alakja módosul. Az állapotok a forgási impulzus négyzetének sajátértékei szerint,

$$L^2 \Psi = J(J+1) \Psi \quad (10)$$

révén osztályozhatók és az atommozgás forgási impulzusára nézve

$$L_0^2 = -A_r = (L - L')^2 = L^2 - 2(L' \cdot L) + L'^2.$$

Ezen összefüggések figyelembe vételével a molekula hullám-egyenlete

$$\left\{ \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{J(J+1)}{r^2} \right) - \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \left(2(L' \cdot L) - L'^2 \right) + H_1(x_i) + H_2(x_k) + V_{12}(x_i, x_k, r, \vartheta, \varphi) \right\} \Psi(x_i, x_k, r, \vartheta, \varphi) = E\Psi(x_i, x_k, r, \vartheta, \varphi) \quad (11)$$

alakba írható.

Az L'^2 operátor nagyságrendje az elektronokkal kapcsolatos L_i operátorokéval azonos, de a vele kapcsolatos tag a sokkal kisebb $\frac{1}{\mu}$ tényezővel lévén szorozva, a hullámegyenlet megoldása szempontjából csak kis szerepet játszik. Az $(L' \cdot L)$ -lel kapcsolatos tag nagysága az L'^2 -nel kapcsolatos igen kicsiny és a $J(J+1)$ -gyel kapcsolatos nem túlságosan nagy tag nagysága közé esik s első közelítésben szintén figyelmen kívül hagyható. A

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \frac{1}{r^2} (2(L' \cdot L) - L'^2) \quad (12)$$

tagok elhagyása esetén a (11) hullámegyenlet az atomi szögkoordináták szerinti differenciáloperátorokat már nem tartalmaz s a koordinátatengelyek alkalmas forgatásával, mikor is az egyik koordinátatengely az atomtömegközéppontokat összekötő iránnyal összeesik, elérhető, hogy a hullámegyenlet e szögkoordinátákat egyáltalában ne tartalmazza. A molekula energianívóinak meghatározására így a

$$\left\{ \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{J(J+1)}{r^2} \right) + H_1(\xi_i) + H_2(\xi_k) + V_{12}(\xi_i, \xi_k, r) \right\} \Phi(\xi_i, \xi_k, r) = E\Phi(\xi_i, \xi_k, r) \quad (13)$$

hullámegyenlet szolgál. ξ_i, ξ_k az elektronoknak a megfelelő elforgatott koordinátarendszerekre vonatkoztatott belső atomi koordinátái.

A Ψ hullámfüggvénynek a ϑ, φ atomi szögkoordinátáktól való függése Φ -ból a ξ_i, ξ_k koordináták x_i, x_k -ba való visszatranszformálása révén áll elő, ha (10) szem előtt tartásával azt még egy $\theta(\vartheta, \varphi)$ függvénytényezővel is szorozzuk. A szögkoordinátáktól való függés előállítására ugyan gyakorlatibb eljárás lényegileg L_0^2 sajátfüggvényeit megállapítani, viszont (10) és (11) közvetítésével kifejezésre jut az a körülmény, hogy az energiaértékek a szigorú jelentőséggel bíró J forgási kvantumszámtól, nem pedig a közelítőleg értelmezett és L_0^2 -nel kapcsolatban fel lépő atomi forgási kvantumszámtól függenek.

A (13) egyenlet megoldása céljából tételezzük fel a hullámfüggvény

$$\Phi(\xi_i, \xi_k, r) = f(r) \Phi_e(\xi_i, \xi_k, r) \quad (14)$$

alakját s így válasszuk szét az atomtömegközéppontok mozgását képviselő $f(r)$ hullámfüggvényt a belső elektronmozgások $\Phi_e(\xi_i, \xi_k, r)$ vektorhullámfüggvényétől. Az elektronok mozgására jellemző Φ_e tényező szükségképpen tartalmazza még az r változót is, minthogy a két atomtömegközéppontra vonatkoztatott elektronok helyzete csak az atomtávolság közvetítésével tekinthető teljesen megadottnak. Hogy azonban az atomtávolságtól való függést az $f(r)$ tényező kellőképpen képviselhesse, a Φ_e tényezőt úgy választjuk, hogy

$$\int \bar{\Phi}_e \cdot \Phi_e d\xi_i d\xi_k \equiv 1 \quad (14a)$$

legyen. A hullámfüggvény ezen alakját (13)-ba helyettesítve, az egyenletet balról skalárisan $\bar{\Phi}_e$ -vel szorozva és az elektronkoordináták szerint integrálva, E és $f(r)$ meghatározására az ismert módszerek szerint kezelhető

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{J(J+1)}{r^2} \right) + U(r) - E \right\} f(r) = 0 \quad (15)$$

egyváltozós másodrendű lineáris differenciálegyenlet adódik.

Az $U(r)$ potenciálgörbe két részből tevődik össze. Az

$$U_1(r) = \int \bar{\Phi}_e \{ H_1(\xi_i) + H_2(\xi_k) + V_{12}(\xi_i, \xi_k, r) \} \Phi_e d\xi_i d\xi_k \quad (16a)$$

kifejezésből és a kicsiny $\frac{1}{\mu}$ tényezővel szorzott

$$U_2(r) = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \int \bar{\Phi}_e \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi_e d\xi_i d\xi_k \quad (16b)$$

részből. A Φ_e r szerinti deriváltjaival kapcsolatos többi tag integrálása (14a) következtében zérust eredményez.

Az atomokból felépülő molekula állapotát jellemző Φ_e függvény meghatározására induljunk ki az atomi problémák

$$H_1(\xi_i) \Phi_1(\xi_i) = E_1 \Phi_1(\xi_i) \quad H_2(\xi_k) \Phi_2(\xi_k) = E_2 \Phi_2(\xi_k) \quad (17a)$$

egyenleteinek az E_1 , illetve E_2 energiához tartozó Φ_1 , Φ_2 megoldásaiból. Φ_1 az első atom f_1 elektronjában antiszimmetrikus tenzornak tekinthető, míg Φ_2 a második atom f_2 elektronjának adataiban antiszimmetrikus. Képezzük a két állapot

$$\Phi_0 = \Phi_1 \times \Phi_2 \quad (17)$$

kompozícióját, melynek 2^f komponense a két atomállapotot jellemző 2^{f_1} , illetve 2^{f_2} hullámfüggvénykomponensből alkotott szorzatok révén keletkezik. Φ_0 a különböző atomokhoz rendelt elektronok felcserélésével szemben nem antiszimmetrikus s a molekula állapotára jellemző vektorfüggvény előállítása céljából azt még antiszimmetrizálni kell. Két elektron szerepének felcserélése részint Φ_0 komponensei közötti szerepcserét jelent a spinkomponenseknek megfelelően, részint az elektronok helykoordinátáinak transzformációjában jelentkezik. A különböző atomtömegközéppontokra vonatkoztatott elektronok koordinátaiban természetesen nincs szükség Φ_e antiszimmetriájára s az energiaoperátor sem ezekben szimmetrikus, hanem a szimmetria a molekula tömegközéppontjára vonatkoztatott közös koordináta-rendszerben mutatkozik. Így a különböző atomtömegközéppontokra vonatkoztatott i, k elektronok szerepének felcserélése a koordináták

$$\xi_k \rightarrow \xi_i - r \quad \xi_i \rightarrow \xi_k + r$$

transzformációját jelenti s Φ_0 antiszimmetrizációját ilyen értelemben kell végrehajtani. Az adott atomállapotoknak megfelelő molekulaállapotra nézve tehát a

$$\Phi_e(\xi_i, \xi_k, r) = N(r) \sum_s \partial_s s \Phi_0 \quad (18)$$

hullámfüggvény jellemző, ahol mindazok az s permutációk veendők tekintetbe, melyek két különböző atomhoz rendelt elektron szerepét felcserélik. Az $N(r)$ normalizációs tényező (14) feltételnek megfelelően választandó.

Φ_e (18) alatti alakjával a (16a) alatti potenciálgörbe

$$U_1(r) = E_1 + E_2 + V(r) \\ V(r) = \int \bar{\Phi}_e V_{12}^*(\xi_i, \xi_k, r) \Phi_e d\xi_i d\xi_k \quad (19)$$

alakba írható, ahol $\Phi_e \partial_s s \Phi_0$ tagjára nézve

$$V_{12}^*(\xi_i, \xi_k, r) = s V_{12}(\xi_i, \xi_k, r)$$

(17a) következtében (15) egyenlet közvetlenül a $D = E - (E_1 + E_2)$ értékeket, a Φ_e -hez tartozó atomtermkombinációtól számított

disszociációs energiákat szolgáltatja. $V(r)$ (18) és (19) folytán különböző csereintegrálokból épül fel, melyek mindegyike még közelebről meghatározható számossággal szerepel. A két atom-állapot egyszerű kompozíciója esetén adódó $\int \bar{\Phi}_0 V_{12} \Phi_0 d\xi$ kifejezés mellett, mely a két atom részei között ható COULOMB-erőknek az atomokon belüli elektronmozgásokra való középértékelését jelenti, ezek a csereintegrálok, szemléletes értelmezésben a két atom között ható csereerők, játszanak (15) alapján a kémiai kötés erőssége és a molekula energiaértékeinek meghatározása szempontjából igen fontos, klasszikus elképzelésekre vissza nem vezethető szerepet.

Mint az a számítások részletezéséből kitűnik, a kötés szempontjából a legkülső elektronhéjak elektronjainak felcseréléséből adódó csereintegrálok bírnak elsősorban jelentőséggel, míg a többi, kisebb abszolútértékű integrál fellelése szolgálhat magyarázatul a periódusos rendszer egyes oszlopaiban lévő elemek kémiai tulajdonságainak az elektronok számának növekedésével fokozatosan bekövetkező megváltozására nézve. Ha a spinkölcsönhatásokat már az atomi problémán belül elhanyagoljuk, az atomi állapotok SCHRÖDINGER-függvényei a tárgyalt szimmetriaosztályokba tartoznak s a teljes állapot antiszimmetrizálása alkalmával a vegyértékelmélet által megszabott lehetőségek lépnek fel.

Ha E_1 , illetve E_2 a megfelelő atomenergiaoperátornak többszörös sajátértéke, az ezen energiaértékhez tartozó állapotok minden lineáris kombinációja is atomállapotot képvisel. Felmerül tehát a kérdés, hogy ebben az esetben kiválaszthatók-e és hogyan azok az E_1 , illetve E_2 energiaértékhez tartozó atom-állapotok, melyek kompozíciójának egyszerű antiszimmetrizálása a (13) alatti molekulaprobléma megoldásának már jóirányú közelítést szolgáltatja. Itt vehetők figyelembe azok a megfontolások, melyek (13) egyenletnek az atomtömegközéppontokat összekötő tengely körüli szimmetriájával kapcsolatosak s az atom-, illetve molekulaállapotokat ezen tengely körüli forgatásokkal szemben való viselkedésük szerint osztályozzák. Az atomtömegközéppontokat összekötő tengely körüli forgatásokkal szemben mutatózó invariancia tünteti ki éppen azokat az atomállapotokat, melyekből az ezen forgatásokkal szemben ugyancsak invariáns molekula-

állapotok leszámaztathatók s teszi lehetővé a kitűzött feladat egyértelmű megoldását.

Az energiának a spintől való függését már az atomokra nézve elhanyagolva, az E energiájú atomállapotok az L , S kvantumszámokkal s ezeknek az atomtömegközéppontokat összekötő tengely irányában vett M_L , M_S komponensei által jellemezhetők. Két ilyen módon megadott atomállapot, valamint az azok kompozíciója és antiszimmetrizálása révén keletkező molekulaállapot az atomtömegközéppontokat összekötő tengely körüli forgatásokkal szemben invariáns. Csak az $M_{1L} = -M_{2L}$ esetben kell az M_L és $-M_L$ kvantumszámokhoz tartozó állapotokat egyidejűleg figyelembe venni, hogy a keletkező kompozíció az atomtömegközéppontokat összekötő tengelyen átfektetett síkokon való tükrözéssel szemben is invariáns tulajdonsággal rendelkezzen.¹⁰ Az M_{1L} , illetve M_{2L} kvantumszámú állapotok kompozíciójából keletkező molekulaállapot a

$$A = M_{1L} + M_{2L} \quad (20)$$

kvantumszámmal jellemezhető, mely az elektronok eredő forgási pályaimpulzusának az atomtömegközéppontokat összekötő tengely irányába eső komponensével hozható kapcsolatba. A ezen lehetséges értékeinek meghatározása WIGNER és WITMER nevéhez fűződik.¹¹

Az atomi jelöléshez hasonlóan a $A=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ kvantumszámokhoz tartozó molekulaállapotokat görög nagybetűkkel Σ , Π , Δ, \dots szimbolizáljuk, a spinmultiplicitást balfelső indexszel jelezve. A Σ állapotokon ezen kívül \pm jelzéssel különböztetjük meg az atomtömegközéppontokat összekötő tengelyen átfektetett síkokon való tükrözéskor mutakozó szimmetriát.

A (13) egyenlet fogalmazásában a $\pm A$ értékekhez tartozó s egyébként azonos módon felépülő molekulaállapotok energiaértékei a potenciálgörbék azonos volta következtében egymástól nem különböznek és a molekulaszínképekből ismeretes A -típusú dublett felbomlása csak a (12) alatti tagok figyelembevételével következik be.

¹⁰ van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, 1932.

¹¹ WIGNER—WITMER, Z. f. Phys. 51, 859, 1928.

Ha az atomi problémákat már a spinkölcsönhatás tekintetbe vételével oldottuk meg, a megfontolások csak annyiban módosulnak, hogy a J_i eredő forgási kvantumszámmal jellemezhető atomállapotokat az atomtömegközéppontokat összekötő tengely irányában vett M_i komponensek szerint osztályozzuk s ezek segítségével építjük fel a megfelelő molekulaállapotokat, melyek az atomállapotokkal együtt az atomtömegközéppontokat összekötő tengely körüli forgatásokkal szemben invariánsak s a spin figyelembevételével adódó \mathcal{Q} kvantumszámmal jellemezhetők.

A hullámfüggvény (14), (18) alatti alakját (13)-ba helyettesítve, illetve (15) egyenletet balról Φ_e -vel szorozva, a két egyenlet összehasonlítása alapján látható, hogy az energiaértékek meghatározására szolgáló (15) egyenletben az elektronkoordinátákra vonatkozó középértékelés folytán elhanyagoltuk részint a

$$\{H_1(\xi_i) + H_2(\xi_k) + V_{12}(\xi_i, \xi_k, r) - U_1(r)\} f \Phi_e \quad (21a)$$

részint a

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \left[\Phi_e \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f - \Phi_e U_2(r) f - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f \Phi_e \right] = \\ & = - \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \left[f \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial r^2} + \frac{2f}{r} \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} + U_2(r) f \Phi_e \right] \end{aligned} \quad (21b)$$

tagokat.

Ezeknek, valamint a (12)-vel összefüggő elhanyagolásoknak tekintetbevételével a molekulaállapotok további közelítéseire a perturbációszámítás módszereivel juthatunk. Hogy sok esetben a hullámegyenletnek már ez a közelítése a molekula energianívóiról helyes képet adhat, azt biztosítja részint az a körülmény, hogy az atommagok jóval nagyobb tömege folytán az elektronmozgásokra vonatkozó középértékelés megengedettnek látszik, részint, hogy míg a meghatározott atomállapotok segítségével felépített Φ_e függvényben csak az elektronok megkülönböztethetetlen voltából adódó szimmetriafeltételeket vettük figyelembe, az atomkoordináták révén rendelkezésre álló szabadsági fokok, — (13) egyenlet felfogásában az $f(r)$ hullámfüggvény, — közvetítésével a részek között meghatározott atomállapotok feltételezésekor még tekintetbe nem vett kölcsönhatások befolyása is kellő módon érvényre juthat. Ha a különböző Φ_e «elektron-

állapotok»-hoz tartozó energianívók megfelelő közelségbe kerülnek, az elhanyagolt tagok hatása érvényesül s a perturbációszámítás tanúsága szerint a különböző állapotok hullámfüggvényei keverednek. Az elektronmozgásokra vonatkozó egyszerű középértékelés ebben az esetben még nem vezet helyes eredményre.

A kémiai kötésre vonatkozó kvantummechanikai dolgozatok szinte kivétel nélkül azzal a közelítéssel élnek, hogy a kémiai kötés szempontjából pusztán az elektronok mozgásának van jelentősége és a molekula problémáját a rögzített helyzetű atommagok erőterében mozgó elektronok hullámegyenletének segítségével tárgyalják.^{12, 13} Az így fellépő kétcentrumprobléma ugyan a kémiai kötés számos jellemző vonását már kifejezésre juttatja, de ugyanakkor nem jut szerephez sok olyan adat, mely a molekula dinamikájával kapcsolatos és kísérletileg a színeképek szerkezetében nyilvánul meg.

Az atomi mozgás kinetikus energiájának elhanyagolásával adódó kétcéntumprobléma hullámegyenlete

$$\{H_1(\xi_i) + H_2(\xi_k) + V_{12}(\xi_i, \xi_k, r)\} \Phi_e^*(\xi_i, \xi_k, r) = E(r) \Phi_e^*(\xi_i, \xi_k, r). \quad (22)$$

Az r atomtávolság most mint parameter kerül a hullámegyenletbe, melynek minden rögzített értékéhez a problémának meghatározott E sajátértékei és Φ_e^* sajátfüggvényei tartoznak. A tömegközéppontok helyzete által meghatározott atomtávolság és az atommagok által megadott magtávolság ebben a közelítésben azonos fogalmak.

A HEITLER—LONDON-elmélet felfogása [szerint¹² a végtelen nagy atomtávolság határesetében az atomok közötti kölcsönhatás nagysága zérus és az atomok a (17a) egyenletek által meghatározott állapotokban vannak. A két atomból álló rendszer energiája ennek megfelelően $E(r) = E_1 + E_2$. Ha a két atom elektronjait, mint ugyanazon molekula részeit fogjuk fel, a rendszer

¹² HEITLER, Quantentheorie und homöopolare chemische Bindung. (MARX's Handb. d. Radiologie. 1934).

¹³ VAN VLECK—SHERMAN, Rev. Mod. Phys., 7, 167, 1935.

állapotát jellemző hullámfüggvény megfelelő antiszimmetrizálása válik szükségessé és «zérusrendű» közelítésben a molekula állapota véges r mellett is az atomok közötti kölcsönhatás elhanyagolása mellett adódó atomi hullámfüggvények kompozíciója és antiszimmetrizálása révén adható meg, úgy, ahogy azt a (17), (18) egyenletek is megadják. A véges r atomtávolsághoz tartozó $E(r)$ energia értéke első közelítésben ezen zérus közelítésű hullámfüggvények segítségével számítható ki s ebben az esetben a kétcentrumprobléma perturbációs számítása vezet a potenciálgörbe már előzőekben felhasznált

$$E(r) = \int \bar{\Phi}_e \{H_1(\xi_i) + H_2(\xi_k) + V_{12}(\xi_i, \xi_k, r)\} \Phi_e d\xi_i d\xi_k = \\ = E_1 + E_2 + \int \bar{\Phi}_e V_{12}^*(\xi_i, \xi_k, r) \Phi_e d\xi_i d\xi_k \quad (19a)$$

kifejezésére. Ebben a felfogásban az atomok taszításáról, vagy vonzásáról, stabil molekulaállapot keletkezéséről, beszélünk aszerint, amint az energiagörbe végig pozitív értékeken keresztül monoton csökkenve tart az atomenergiák összegéhez, vagy pedig minimummal rendelkezik. Stabil molekulaállapot esetén az energia minimumának az atomenergiák összegétől számított értéke a molekulaállapot disszociációs energiáját jelenti, a minimum helyének megfelelő atomtávolság a molekula egyensúlyi atomtávolsága. A (19a) alatti energiagörbe a kétcentrumprobléma felfogásában mindenesetre csak első közelítés.

A molekula, mint az a színeképekből ismeretes, diszkrét energiaállapotokkal rendelkezik. Az atomi mozgást is figyelembe vevő hullámegyenlet szempontjából a potenciálgörbe alakja diszkrét energiaértékek fellépésének bekövetkezését és azok rendszerének alakulását határozza meg. Az r parameter függvényében folytonosan változó energiasajátértékgörbe fogalma a tapasztalati képtől így igen messze van. Az energiának az atomtávolságtól való függéséről nem beszélhetünk már csak azért sem, mert a molekula energiaoperátora az r atomtávolsággal fel nem cserélhető s így az energia az atomtávolsággal egyidejűleg nem is mérhető mennyiség. A folytonos energiagörbe fogalma még olyan messze van a színekép diszkrét energianívóinak visszatükrözésétől, mint a klasszikus mechanika folytonos energiaspektrumú harmonikus oszcillátorának képe kvantummechanikai megfelelőjének diszkrét

energiaállapotaitól. A hiányzó kvantálást éppen (15) egyenlet szolgáltatja.

A kétcentrumproblémából a molekulára nézve levonható következtetések igazolására általában arra történik hivatkozás, hogy az atomi mozgást is figyelembe vevő hullámegyenlet megoldása is visszavezethető a kétcentrumprobléma megoldására. Itt első-sorban BORN és OPPENHEIMER dolgozatát¹⁴ idézik, bár a hivatkozások sokszor messze túlmennek e dolgozat keretein. Ez a sokat idézett és inkább csak formai megoldást nyújtó dolgozat a molekula hullámegyenletének megoldását szukcesszív közelítéssel tárgyalja, az elektrontömeg és valamely közepes atommag-tömeg viszonyának negyedik gyöke szerint sorbafejtve a hullámegyenletben szereplő kifejezéseket. A szukcesszív közelítés első egyenletében a magtömegeket is tartalmazó tagok nem lépnek fel és az azokkal kapcsolatos tagok elhagyása természetesen a kétcentrumprobléma hullámegyenletét szolgáltatja. Érdeemes talán még megjegyezni, hogy a megoldás hangsúlyozottan stabil molekulaállapotokra vonatkozik, a taszító jellegű potenciálgörbék lehetőségét nem foglalja magában.

Az atomi mozgást is tartalmazó hullámegyenletnek a kétcentrumproblémán keresztül való megoldása, ami a molekula tárgyalásának szokásos módja,^{8, 15} azonban inkább SLATER egy dolgozatára¹⁶ nyúlik vissza, melyben a héliumatom problémájára alkalmazza az itt is követhető eljárást. Az alkalmazott koordinátarendszerek különbözőségéből adódó lényegtelen különbségeket figyelmen kívül hagyva, az eljárás lényege az, hogy a

$$\left\{ \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{J(J+1)}{r^2} \right) + H_1(\xi_i) + H_2(\xi_k) + V_{12}(\xi_i, \xi_k, r) \right\} \Phi(\xi_i, \xi_k, r) = E \Phi(\xi_i, \xi_k, r) \quad (13)$$

hullámegyenlet megoldása céljából az első két tagot, lényegileg az atomkoordináták szerinti deriváltakat, először elhagyva, a

¹⁴ BORN—OPPENHEIMER, Ann. d. Phys., (4), **84**, 457, 1927.

¹⁵ KRONIG, Z. f. Phys., **50**, 347, 1928.

¹⁶ SLATER, Proc. Nat. Ac., **13**, 423, 1927.

kétcentrumprobléma (22) alatti hullámegyenletét oldjuk meg s a hullámfüggvényt

$$\Phi(\xi_i, \xi_k, r) = f^*(r) \Phi_e^*(\xi_i, \xi_k, r) \quad (14^*)$$

alakban tételezve fel, a (14), (18)-cal kapcsolatos megoldással azonos módon járunk el, az energia lehetséges értékeit és az $f^*(r)$ függvényt a kétcentrumprobléma pontos $E(r)$ sajátértékgörbéjének segítségével a

$$\left\{ \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{J(J+1)}{r^2} \right) + E(r) + U_2^*(r) - E \right\} f^*(r) = 0 \quad (15^*)$$

egyenletből határozva meg. A sajátértékgörbe jelentése folytán a (21a)-val kapcsolatos elhanyagolások itt nem lépnek fel s az elhanyagolt tagok alakja az indexes jelöléstől eltekintve azonos a (21b) alatti kifejezéssel.

Több elektron esetén mind a (19) alatti csereintegrálokból felépülő potenciálgörbe meghatározása, mind pedig a kétcentrumrendszer sajátértékproblémája bonyolult matematikai feladat. De az egyszerűbb esetekben még adódó közelítő megoldások is már túlságosan nehezen kezelhetők a (15), illetve (15^{*}) egyenlet szempontjából. Így a molekula problémájának ezekre való visszavezetése inkább elvi természetű. Jelentőséggel azért bír, mert a molekula szinképe egy-egy elektronállapoton belül az atomi mozgásnak megfelelő szabályos szerkezetet mutat s az elmélet feladata, hogy ezeknek az elektronállapotoknak természetére fényt vessen. Az első felfogás szerint az atomokból felépülő molekula ezen elektronállapotait (14), (18), (17), (17a) alapján a megfelelő atomállapotok viszonyai jellemzik, míg a kétcentrumproblémára visszanyúló értelmezésben az atomok mozgását a rögzített atommaghelyzeteknek megfelelően adódó sajátértékgörbék szabályozzák. (19a) egyenlet közelítésében természetesen a két felfogásmód megegyezik.

A molekula elektronállapotain belül mutatkozó rezgési és forgási szerkezet visszaadása céljából az eljárás azután általában az, hogy a (15), illetve (15^{*}) egyenlet potenciálgörbéjének alakjára nézve valamilyen egyszerűbb matematikai feltevéssel élünk úgy, hogy az adódó eredmények a tapasztalattal lehető jó egye-

zést mutassanak. Az így választott potenciálgörbében még szereplő állandók értéke éppen a kísérleti adatokból határozható meg. Az egyenletből adódó energianívók a v rezgési kvantumszám egészszámú értékeivel jellemezhetők és az energiaértékeknek a J forgási kvantumszámtól való függését ugyancsak ezen egyenletek szolgáltatják. A kiindulásul szolgáló probléma ebben az esetben lehet közvetlenül a rezgő és forgó molekula elektronkoordinátáktól mentes hullámegyenlete is, aminthogy az már SCHRÖDINGER első dolgozatai óta¹⁷ gyakran szerepel a molekula szerkezetére vonatkozó vizsgálatoknál. A potenciálgörbe alakjára vonatkozólag az irodalomban elterjedt nagyszámú feltevés közül MORSE¹⁸ potenciálgörbéjét említjük, mely aránylag egyszerűen kezelhető és sokszor vezet jó eredményre. Ez szolgáltatja egyben a hullámmechanika irodalmának első ismeretes SCHRÖDINGER-egyenletét, mely véges számú diszkrét sajátértéket szolgáltat.

A kétcentrumprobléma felfogásmódjában az energiasajátértékek a folytonosan változtatható r parameter függvényében jelentkeznek. Két különböző elektronállapothoz tartozó potenciálgörbe metszése valamely r mellett a probléma elfajulását, két sajátérték összeesését jelenti. NEUMANN és WIGNER véges dimenziós mátrixokra szorítkozva kimutatták,¹⁹ hogy amennyiben a mátrix valamely folytonos parameter függvénye, annak változtatásával eredetileg különböző két sajátérték összeesése általánosságban el nem érhető, mert ehhez legalább három parameter egyidejű változtatása szükséges. A tétel matematikai magya már korábban is szerepel WEYL egy munkájában,²⁰ aki kimutatja, hogy a csupa különböző sajátértékkel rendelkező mátrixok sokasága hárommal nagyobb dimenziószámú, mint azoké, melyeknek két sajátértéke megegyezik.

A matematikai tételt a kétcentrumproblémára alkalmazva, amennyiben annak valamely közelítésben egymást metsző potenciálgörbéi adódnának, ezen elv értelmében azok kitérnek. A közelítés folyamán elhanyagolt kölcsönhatás következtében a

¹⁷ SCHRÖDINGER, Ann. d. Phys., (4), 79, 489, 1926.

¹⁸ MORSE, Phys. Rev., 34, 57, 1929.

¹⁹ NEUMANN—WIGNER, Phys. Zeitschr., 30, 467, 1929.

²⁰ WEYL, Mathem. Zeitschr., 23, 292, 1925.

rögzített r -hez tartozó energiaértékek egymást «taszítják» és a helyes potenciálgörbék a perturbációs számítás módszerei szerint határozandók meg. Az elv mindenestre csak azonos szimmetriájú állapotokra alkalmazható, amikor esetleg még figyelembe nem vett kvantumszámok nem teszik lehetővé összeeső sajátértékek fellépését. A molekulára vonatkozó kétcentrumrendszer esetében ez A és a spinmultiplicitás egyezését kívánja és a kitérés elv az ezekben közös, «azonos fajta», potenciálgörbékre vonatkozik.

Szép alkalmazást talál a NEUMANN és WIGNER által tárgyalt kvantummechanikai elv a ZEEMAN-effektusnál. Itt az energianívók felbomlásának mértéke a mágneses térerősség függvénye. A normális ZEEMAN-effektusnál a H mágneses térerősség következtében felbomlott energianívók távolsága

$$\Delta E = \frac{e}{2mc} \frac{h}{2\pi} |H|.$$

A mágneses térerősség folytonosan változtatható parameternek tekinthető és a különböző térerősségekhez tartozó ZEEMAN-komponensek egymáshoz rendelésénél tekintetbe kell venni, hogy az azonos mágneses kvantumszámhoz tartozó energiagörbék a mágneses térerősség függvényében egymást nem keresztezhetik.²¹

HUND a molekula energianívói és az atomszínképek alapján adódó $E_1 + E_2$ atomtermkombinációk között keresve hozzárendelési elvet,²² a ZEEMAN-effektus ezen törvényszerűsége alapján arra a feltevésre jutott, hogy az ottani helyzethez hasonlóan a hozzárendelésnek oly módon kell történnie, hogy azonos elektronkvantumszámok mellett közben «kereszteződések» ne lépjenek fel. HUND mindenestre még bizonyos óvatosságra int annak tudatában, hogy a molekulában a folytonosan változtatható r parameter képe csak gyenge közelítés. Ezen hozzárendelési elv elterjedését azután nagyban elősegítette NEUMANN és WIGNER dolgozata, mely az elvet megfelelő matematikai formába öltöztette s annak jogosultságát a kétcentrumproblémára nézve is igazolta. WEIZEL a hozzárendelési elvről írt egyik dolgozatában²³

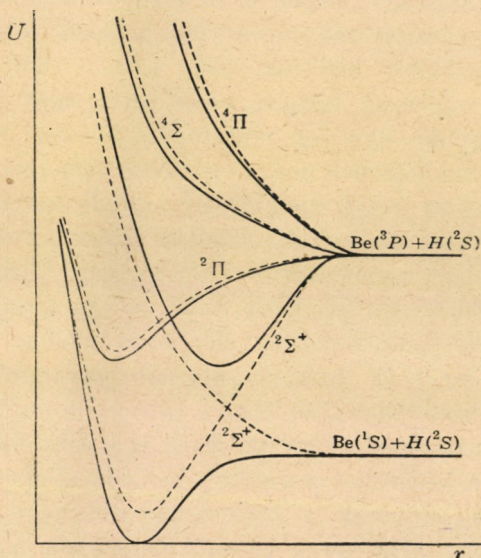
²¹ HUND, Linienspektren und periodisches System der Elemente. 1927.

²² HUND, Z. f. Phys., 40, 742, 1927. 43, 624, 1927. 52, 604, 1928—29.

²³ WEIZEL, Z. f. Phys., 59, 320, 1929—30.

ugyan éppen WIGNERT idézi, akivel egyetértésben megállapították, hogy a folytonosan változtatható parameterrel kapcsolatos megfontolások a diszkrét energiaállapotokkal rendelkező molekulára nézve nem alkalmazhatók, de megjegyzésük az irodalomban visszhangra nem talált.

A molekula potenciálgörbéinek kitérésével kapcsolatos elv a belőle levonható következtetésekkel együtt az egész molekula-irodalomban nagy elterjedtségnek örvend. ²⁴, ¹², ¹³, ²⁵, ²⁶ A mel-



3. ábra.

lékelt, HERZBERG könyvéből vett, 3. ábra az elvet a BeH sematikus potenciálgörbéin szemlélteti, egyben mutatva, hogy az atom-alapállapotokhoz tartozó atomtermkombinációból kiinduló taszító jellegű potenciálgörbe és a gerjesztett atomállapotnak megfelelő energiagörbe kölcsönhatása folytán a molekula alapállapotából csak alapállapotokba disszociálhat. A szaggatott vonal a még

²⁴ HERZBERG, Molecular Spectra and Molecular Structure. 1939.

²⁵ MULLIKEN, Rev. Mod. Phys., **4**, 25, 1932.

²⁶ MULLIKEN, J. Phys. Chem., **41**, 6, 1937.

metszésben lévő görbesereget, a kihúzott vonal a metszést már nem mutató görbesereget jelzi.

Az irodalomban számos kísérlet található, mely számítással is igyekszik végrehajtani a HEITLER—LONDON-elmélet megoldásából, mint első közelítésből, kiinduló perturbációs eljárást a kétcentrumprobléma további közelítéseinek meghatározására. A molekulára jellemző disszociációs energiák és egyensúlyi atomtávolságok így ezen további közelítéssel volnának közelebbről jellemezve. IRELAND²⁷ éppen a BeH potenciálgörbéivel végzett ilyen irányú számításokat, míg a többi dolgozat közül NORDHEIM-PÖSCHL dolgozatát²⁸ említjük, mely számos molekulára alkalmazza ezt a módszert. IRELAND eredményei saját megállapítása szerint is gyenge egyezést mutatnak a kísérleti tapasztalattal, bár a BeH szinképeének mai fogyatékos ismerete mellett még korai a számított kötési energiák tapasztalati összehasonlításáról beszélni. A hasonló hidridmolekulák jobban ismert szinképe alapján azonban mindenesetre valószínűnek látszik, hogy az atomállapotokból nem keletkezik stabil molekulaterm, mint ahogy az a HEITLER—LONDON-elmélet alapján is adódik.

A potenciálgörbék kitérésén alapuló hozzárendelési elv elfogadásának hátterében elsősorban a kétcentrumrendszer modellje áll, erre vonatkoznak a hivatkozások is s csak hallgatólagosan kapcsolódik a kérdéshez a diszkrét molekulaállapotokat szolgáltató hullámegyenletnek a kétcentrumproblémára való visszavezetése. Hogy azonban a kétcentrumrendszer modelljére való hivatkozás itt már túljut a modell alkalmazhatóságának keretein, mutatja az a körülmény, hogy a molekula diszkrét energianívóit helyettesítő folytonos energiasajátértékgörbék rendszerének alakulásáról van szó, holott az energiával egyidejűleg nem is mérhető r atomtávolság függvényében megadott energiaértékek képe a modell alkalmazásának éppen legátmadhatóbb pontja. A folytonosan változó energiasajátértékek rendszerének alakulása a molekula diszkrét energiasajátértékeinek viselkedéséről helyes képet nem adhat. Ide irányul WEIZEL és WIGNER idézett megjegyzése is.

²⁷ IRELAND, Phys. Rev., **43**, 329, 1933.

²⁸ NORDHEIM-PÖSCHL, Ann. d. Phys., (5), **26**, 258, 1936.

A kérdéssel kapcsolatban szokásos a kvantummechanika adiabtikus elvére is hivatkozni, mely szerint valamely kvantummechanikai rendszer állapotai lassan változó parameter függvényében a parameter mindenkori értékének megfelelően alakulnak.^{29, 30} Az elgondolások szerint lassú, adiabtikusnak tekinthető atomi mozgás esetén a molekula energiája a mindenkori atomtávolság értékének megfelelően alakulna. Itt azonban megint megfontolandó, hogy az atomtávolság az energiával egyidejűleg egyáltalában nem is mérhető és közelítőleg sincs a molekulának meghatározott atomtávolsághoz tartozó energiaállapota. Adiabtikus változásról legfeljebb abban az átvitt értelemben lehet beszélni, hogy a kétcentrumprobléma az atomi mozgást is tartalmazó molekulaproblémával kapcsolatban áll és bizonyos esetekben a kétcentrumprobléma adiabtikusnak tekinthető feladatkörében adódó sajátértékgörbék alkalmasak a molekula diszkrét energiaértékeinek meghatározására.

Ami most már a rezgő és forgó molekula problémájának a kétcentrumproblémával való kapcsolatát illeti, vizsgáljuk a (13) alatti alakra hozott molekulaprobléma megoldását elvileg kétféle eljárással. Először az atomokból felépülő molekula energiaállapotainak közelítő előállítására céljából képezzük az atomi állapotok hullámfüggvényeinek kompozíciója és antiszimmetrizálása révén előálló Φ_e hullámfüggvényeket s az atomok közötti kölcsönhatást az ezek segítségével nyerhető csereintegrálok útján véve tekintetbe, határozzuk meg a hullámfüggvény $f(r)$ tényezőit s az energia E sajátértékeit. Azután a kétcentrumproblémára visszanyúló megoldással a Φ_e^* hullámfüggvények legyenek a kétcentrumprobléma sajátfüggvényei s az $f^*(r)$ tényezők és E sajátértékek meghatározása történjék a kétcentrumprobléma sajátértékgörbéinek segítségével. A HEITLER—LONDON-elmélet szerint a kétcentrumprobléma első közelítése ugyancsak az atomi állapotok kompozíciója révén történik s a további közelítések már a különböző atomkombinációk elhanyagolt kölcsönhatását veszik figyelembe. Ha tehát a kétcentrumprobléma megoldását csak az első

²⁹ EHRENFEST, Ann. d. Phys., (4), **51**, 327, 1916.

³⁰ BORN—FOCK, Z. f. Phys., **51**, 165, 1928.

közelítésig hajtjuk végre, a (13) alatti molekulaprobléma megoldása mindkét felfogásban ugyanarra az eredményre vezet. A megoldások az alkotó atomoknak meghatározott állapotait veszik figyelembe s azok jellemző viszonyait tartalmazzák. Amennyiben az atomenergiák skáláján az egyes atomtermkombinációk egymástól olyan távolságra vannak, hogy a megfelelő atomkombinációkhoz rendelhető molekulaállapotok energianívói azokon belül elhelyezkedhetnek anélkül, hogy egymás zavaró közelségébe kerülnének, vagy pedig az egymáshoz közeleső molekulatermeket szolgáltatató atomkombinációk külön-külön való tárgyalása a hullámegyenletben csak jelentéktelen elhanyagolást jelent, úgy a hullámegyenletnek ez a közelítése a kérdéses állapotokra nézve már helyes képet nyújt. Ebben az esetben a HEITLER—LONDON-elmélet potenciálgörbéi sem különböznek lényegesen a kétcentrumprobléma pontos energiagörbeitől s a molekulaprobléma adiabatikusnak tekinthető, amennyiben az energia értékei az atomi mozgás elhanyagolásával adódó kétcentrumprobléma sajátértékgörbéinek közvetítésével is meghatározhatók.

Ha azonban a molekulánívók kölcsönös helyzete, vagy a különböző atomkombinációk között elhanyagolt kölcsönhatás nagysága olyan, hogy a vázolt közelítés már nem nyújt kellő megoldást, az atomkombinációk együttes fellépését is tekintetbe kell venni. Nyilvánvaló azonban, hogy a szükséges perturbációszámítást a molekula diszkrét energianívói, nem pedig a kétcentrumprobléma fiktív sajátértékgörbéi között kell végrehajtani.

Ha egyszerűség kedvéért csak két különböző elektronállapothoz tartozó energianívó kölcsönhatását vesszük tekintetbe, a perturbált állapot hullámfüggvénye az első állapot $f_{A, v_1} \Phi_{e_A}$ és a második állapot $f_{B, v_2} \Phi_{e_B}$ hullámfüggvényeinek

$$\Phi = c_1 f_{A, v_1}(r) \Phi_{e_A}(\xi_i, \xi_k, r) + c_2 f_{B, v_2}(r) \Phi_{e_B}(\xi_i, \xi_k, r) \quad (23)$$

lineáris kombinációjaképpen adódik. Ezzel szemben a kétcentrummodell rögzített r parameterű «állapotainak» perturbációszámítása

$$\Phi_e^* = c_1(r) \Phi_{e_A}^*(\xi_i, \xi_k, r) + c_2(r) \Phi_{e_B}^*(\xi_i, \xi_k, r) \quad (23^*)$$

alakú megoldásokra vezet s az adódó molekulaállapotok $f_v^* \Phi_e^*$

alakúak. Természetes, hogy a kétféle eljárás az energiaértékekre nézve is egészen különböző eredményt ad.

Tekintettel arra, hogy a különböző állapotok hullámfüggvényeinek keveredése azonos kölcsönhatás mellett annál erősebb, minél közelebb esnek az egymást zavaró energiaértékek, egymást metsző potenciálgörbék esetén a kétcentrummodell (23*) alatti perturbált hullámfüggvényeinek $c_1(r)$, $c_2(r)$ tényezői a metszéspont környezetében gyors változást szenvednek a metszésponttól távolabb felvett 0, illetve 1 érték között. Ha tehát Φ_e^* ezen kifejezésével a molekula hullámegyenletét $f_v^* \Phi_e^*$ alakú megoldással igyekszünk kielégíteni, a Φ_e^* r szerinti deriváltjait tartalmazó (21b) alatti elhanyagolt tagok nagysága Φ_e^* gyors változása következtében igen nagy lehet, úgyhogy a hullámegyenletnek rossz közelítését kaphatjuk, mely a diszkrét energianívók közötti további perturbációs számítás folyamán esetleg nem is konvergál.

LONDON egyik dolgozatában³¹ a potenciálgörbékre vonatkozó egyszerű feltevések segítségével tárgyal ilyen eseteket, ahol éppen az adódó $c(r)$ tényezők gyors változása következtében nyilvánvaló a molekula «nem adiabatikus viselkedése» s így az azzal kapcsolatos elvek áthágása. Álláspontunkon azonban természetesen nem oszthatjuk a dolgozat kiindulási pontját sem, mely szerint a kémiai kötés dinamikájával kapcsolatban felmerülő kérdés az volna, hogy a kétcentrumprobléma «adiabatikus» feladatának pontos megoldásai által jellemzett molekulaállapotok között milyen valószínűséggel lépnek fel nem adiabatikusnak nevezett átmenetek. A meghatározott állapotokkal jellemezhető atomok ütközésekor e helyett éppen a még ismertetendő predisszociációs jelenségekben mutatkozó átmenet következhetik be más atomkombinációval jellemzett molekulaállapotba. Az idézett dolgozat számításainak értékelésénél mindenesetre figyelembe veendő az a körülmény is, hogy az atomkombinációk hullámfüggvényeinek antiszimmetrizálása, mely a kötés szempontjából oly lényeges csereintegrálokra vezet, nincs végrehajtva.

A molekula energiaspektruma az atomtermkombinációk helyén kezdődő folytonos spektrumrészeket tartalmaz, melyek az egy-

³¹ LONDON, Z. f. Phys., **74**, 143, 1932.

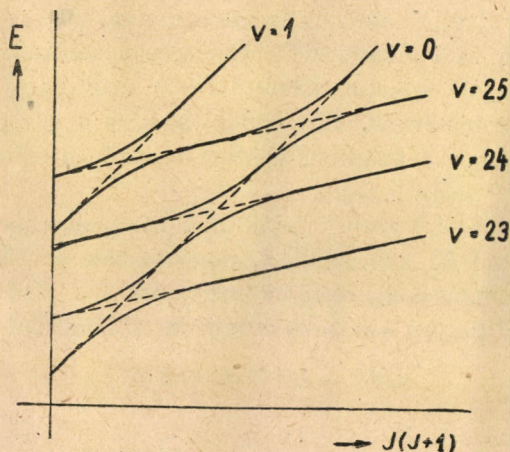
mashoz képest kinetikus energiával rendelkező atomok állapotának felelnek meg. Az egymást metsző potenciálgörbék esetén (23*) felfogásában adódó molekulaállapotoknak a kontinuumhoz tartozó hullámfüggvénye különböző atomkombinációk ϕ_e hullámfüggvényeit tartalmazza akkor is, ha két potenciálgörbe kölcsönhatása alkalmával a nagyobb energiájú atomtermkombinációról van szó, melynek magasságában esetleg más molekulánívó nem található. Ez a körülmény is rávilágít a (23*) alatti megoldás által nyújtott kép fogyatékos voltára, mert a kontinuum meghatározott energiaállapotban lévő szabad atomjairól feltételezhető, hogy csak ezen állapotok jellegét mutatják akkor is, ha a két atomot együttesen mint molekulát fogjuk fel. A kontinuum hullámfüggvényeinek más hullámfüggvényekkel való keveredése csak akkor várható, ha az atomtermkombináció közelségében más, stabil molekulatermek is vannak, ami a predisszociáció már említett jelenségéhez vezet.

A különböző atomkombinációk együttes fellépésének megnyilvánulását tehát a potenciálgörbék kölcsönhatása helyett a molekula energiaspektrumának alakulásában várhatjuk. A molekulaszínképekből jól ismert jelenség az egy-egy elektronállapoton belül mutakozó szabályos szerkezetben fellépő zavar, a perturbáció és predisszociáció jelensége, mely a különböző elektronállapotok kölcsönhatásának tulajdonítható. Röviden foglalkoznunk kell még ezekkel a jelenségekkel is, elsősorban olyan szempontokat emelve ki, melyek az eddig tárgyalt problémakörrel kapcsolatosak.

A különböző elektronállapotok diszkrét energianívóinak közelsége esetén mutakozó perturbáció jelensége szigorúan csak azonos J forgási kvantumszámmal jellemzett állapotok kölcsönhatásaképpen észlelhető. Ez a forgási kvantumszám szigorú csoportelméleti jelentésével áll kapcsolatban, J a térbeli forgatásokkal szemben invariáns osztályokra bontván a molekula állapotait. (13) egyenletben a J kvantumszámnak már meghatározott értéke lép fel s a (12) alatti tagoknak tulajdonítható perturbáció a különböző J -hez tartozó állapotok (10) egyenlettel jellemzett tulajdonságát szintén nem befolyásolja, minthogy az L^2 operátor a (12) alatti $2(L' \cdot L) - L'^2$ operátorokkal felcserél-

hető. Hasonló a helyzet a jobb- és balrendszer közötti invarianciával kapcsolatos \pm szimmetriát illetően is.

Míg azonban (13) egyenlet felfogásában a A kvantumszámnak az atomtömegközéppontokat összekötő tengely körüli forgatással kapcsolatos szigorú jelentőség jut, a (12) alatti tagok figyelembe vételével különböző A -hoz tartozó elektronállapotok nivóinak kölcsönhatása is értelmezhető és ilyen állapotok kölcsönhatása esetén a A kvantumszám a perturbált állapotokra nézve már elveszti jelentőségét. Míg tehát a kétcentrumprobléma a külön-



4. ábra.

böző elektronállapotok közötti kölcsönhatásnál csak az azonos A -val jellemzett azonos fajta potenciálgörbékét veszi figyelembe, a molekula diszkrét energianívóinak alakulásában különböző A -hoz tartozó rendszerek nivói is befolyásolhatják egymást. Ha az energiaoperátorban a spintagokat is tekintetbe vesszük, a különböző spinmultiplicitáshoz tartozó állapotok perturbációi is értelmezhetők.

A molekula valamely elektronállapotának energianívóit a $\frac{2\pi}{h}$ -val szorzott forgási impulzus négyzetének $J(J+1)$ sajátértékei függvényében ábrázolva közelítőleg egyenes görbék adódnak, melyek mindegyikéhez perturbálatlan állapotok esetén a v rezgési kvantumszám meghatározott értéke tartozik. Amennyiben

két elektronállapot energianívói egymás közelébe esnek, a megfelelő egyenesrendszerek metszésbe kerülhetnek és az azonos J értékhez tartozó nívók egymást perturbálván, ebben az ábrázolásban szemléletesen látható a perturbált energianívórendszer alakulása. (4. ábra.) (13) egyenlet szempontjából $J(J+1)$ folytonos parameternek is tekinthető és az energiának ezen egyenletből adódó $J(J+1)$ szerinti függése nem szorítkozik a $J(J+1)$ értékek diszkrét sokaságára. Ebben a felfogásban a 4. ábra perturbálatlan görbéinek kitérését bizonyos fokig a NEUMANN—WIGNER elv szemléltetésének is tekinthetjük, bár az értelmezés ilyen alakban való alkalmazhatósága erősen korlátozott, mert a (12) alatti tagok szempontjából $J(J+1)$ már nem tekinthető folytonos parameternek. Lényegileg nem is a görbék kitérése, hanem az azonos J kvantumszámhoz tartozó energianívók kölcsönhatása bír jelentőséggel.

Az $E=f(J(J+1))$ görbék érintőinek iránytangense a közepes atomtávolsággal áll kapcsolatban, pontosabban a kérdéses állapotban az atomtávolság reciproka négyzetes középértékével arányos. A $J=0$ helyen ezt beláthatjuk, ha (13) egyenletet

$$(H^{(0)} + \lambda H^{(1)}) \Phi = E \Phi$$

alakban fogjuk fel, $\lambda=J(J+1)$, $H^{(1)} = \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \frac{1}{r^2}$ mellett és feltevézzük, hogy (13) energiaoperátorának sajátértékei és sajátfüggvényei $J(J+1)$ szerint sorbafejthetők.

$$\begin{aligned} E &= E_0 + B(J(J+1)) + D(J(J+1))^2 + \dots \\ \Phi &= \Phi^{(0)} + \lambda \Phi^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Minthogy $H^{(0)} \Phi^{(0)}$ sajátfüggvényei egyben (13) egyenlet $\Phi_{J=0}$ megoldásai $J=0$ esetén, a perturbációs számítások szokásos eljárásánál követett módon⁷ adódik

$$B = \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \int \bar{\Phi}_{J=0} \frac{1}{r^2} \Phi_{J=0} dq, \quad (25a)$$

ahol az integrálás és esetleges összegezés az egész konfiguráció-tér dq térfogatelemével értendő. Az energia (24) alatti sorbafejtett alakja szerint B egyben a $J(J+1)$ szerinti energiagörbe $J=0$ helyen vett érintőjének iránytangense. Ha (13) egyenlet-

hez hozzáadunk és belőle kivonunk $\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \frac{J_a(J_a+1)}{r^2}$ -t, akkor ugyanezt az eljárást alkalmazhatjuk $\lambda' = J(J+1) - J_a(J_a+1)$ szerint, vagyis a $J_a(J_a+1)$ hely környezetében fejtve sorba a sajátértékeket és sajátfüggvényeket. $\Phi^{(0)}$ ebben az esetben a (13) hullámegyenlet $J=J_a$ -hoz tartozó megoldása és a sorbafejtés lineáris tagjának együtthatójára, az energiagörbe $J_a(J_a+1)$ helyen vett érintőjének iránytangensére nézve

$$B_{J_a} = \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \int \bar{\Phi}_{J_a} \frac{1}{r^2} \Phi_{J_a} dq \quad (25)$$

adódik. Mindenesetre megfontolandó, hogy eljárásunk a forgási kvantumszámot csak parameterként tartalmazó (13) egyenletre szorítkozik, de valószínűnek látszik a nyert összefüggésnek a levezetéstől független, általánosabb érvényessége. Az a körülmény, hogy az $E=f(J(J+1))$ görbe érintőinek ilyen szemléletes fizikai értelmezés adható, azért bír jelentőséggel, mert a színképekből közvetlenül az energiagörbék érintőivel gyakorlatilag azonos hűrok $\frac{E_{J+1} - E_{J-1}}{4J+2}$ iránytangensei adódnak és így ezek tekintendők a molekulaállapotok jellemző kísérleti adatainak, nem pedig az energiagörbe (24) alatti sorbafejtésében fellépő s az összes rendelkezésre álló adatok segítségével körülményesen és mindig csak korlátozott pontossággal számítható hatványsor-együtthatók.

A molekula elektronállapotait jellemző potenciálgörbék met-szése a színkép vonalak intenzitásával kapcsolatos FRANCK—CONDON³² elvhez hasonló módon bizonyos vonatkozásban kapcsolatban áll az energianívók között fellépő perturbáció erősségével. Ha a hullámegyenlet Ψ_k közelítő megoldása a hullámegyenlet $T_1\Psi_k$ tagjainak elhanyagolásával jön létre, úgy a perturbáció erősségét, az energianívók eltolódásának mértékét, a perturbálatlan nívók közelségén kívül az $\int \bar{\Psi}_i T_2 \Psi_k dq$ alakú kifejezések nagysága határozza meg. Ha a molekula esetében a (21b) kifejezés harmadik tagjától eltekintünk, az elhanyagolt

³² CONDON, Phys. Rev., **32**, 858, 1928.

$T_1 \Psi_k$ tagok $\Psi_k f_k(r)$ tényezőjével arányosak s az integrálandó kifejezés nagysága részben az $f_i(r) \cdot f_k(r)$ szorzat nagysága által van meghatározva. Mint az például a MORSE-közelítés potenciálgörbéje esetén belátható, az $f_k(r)$ hullámfüggvény a megfelelő potenciálgörbének az energianívó magassága által meghatározott r értékei közelében általában erős szélső értékkel rendelkezik s egymást metsző potenciálgörbék metszéspontjának energia-magassága közelében így az $f_i(r)$, $f_k(r)$ tényezők megfelelő módon való szorzódása várható. Minthogy azonban az $f(r)$ függvények más szélső értékekkel is rendelkezhetnek, a megfelelő szorzatok egyéb módon is vehetnek fel jelentős értéket s a FRANCK—CONDON elv ilyen irányú alkalmazhatósága inkább kvalitatív jellegű. Az egész megfontolás azonban független a potenciálgörbék azonos vagy különböző fajta voltától s annak az azonos fajta potenciálgörbék esetén mutatkozó erősebb, «homogén» perturbációra való alkalmazása már magában foglalja azt a feltevést, hogy a molekula perturbálatlan elektronállapotainak potenciálgörbéi nem azonosak a kétcentrumprobléma egymással metszésbe nem kerülő potenciálgörbéivel.

Az azonos elektronkvantumszámok esetén fellépő homogén perturbációt egyes szerzők homályos módon kapcsolatba hozzák^{24, 33} a potenciálgörbék kitérésével, bár elméleti szempontból és tapasztalatilag egyaránt nyilvánvaló, hogy a potenciálgörbék szigorúan csak a perturbálatlan elektronállapotokkal kapcsolatosak, a perturbáció viszont már a potenciálgörbék által meghatározott energianívók, nem pedig a potenciálgörbék között jön létre.³⁴ Még ha a perturbálatlan elektronállapotoknak (15*) egyenlet szerint a kétcentrumprobléma egymást nem metsző potenciálgörbéi felelnének is meg, azok kitérésí elve a perturbáció folyamán már nem mutakozhatnék, ha pedig (15) egyenlet álláspontján megengedjük az azonos fajta potenciálgörbék metszését, a perturbáció akkor is csak a diszkrét energianívók között jelentkezhetik.

Ugyancsak téves az a felfogás,²⁴ mintha az azonos J -hez tar-

³³ STEPANOV, Journ. Phys. USSR., 2, 373, 1940.

³⁴ SCHMID—GERÖ, Ann. d. Phys., (5), 33, 70, 1938.

tozó energiaértékek görbéi akár a v rezgési kvantumszám, akár valamilyen más megfelelően választott számozás függvényében a $J(J+1)$ függvényében mutatkozó szabályos kitéréshez hasonló viselkedést mutatnának. Részint, mert a perturbáció nagysága a választott indextől nagyjában függetlenül elsősorban az energianívók közelsége által van meghatározva, részint, mert a különböző indexű állapotok hullámfüggvényeinek keveredése folytán a perturbált nivókra nézve a kérdéses indexek esetleges jelentősüket már teljességgel elveszítik.

A homogén perturbációra vonatkozó ezen és hasonló megfontolások elsősorban az AgH két $^1\Sigma$ nivójának csak részben rendezett perturbációjára hivatkoztak. Mint azonban az a kérdéses színekprész több mint 60 sávjának rendezése folyamán kiderült,³⁵ a tapasztalható perturbáció az egyéb ismert perturbációktól csak erősségben különbözik s a vele kapcsolatos elképzeléseket semmiképpen sem támasztja alá. A fellépő erős kölcsönhatás következtében a v rezgési kvantumszám szerint való megkülönböztetés lehetősége teljesen megszűnik, a két elektronállapot energianívói célszerűen csak nagyság szerint rendezhetők s ilyen esetben már nincs sok értelme potenciálgörbék-ről sem beszélni. Viszont szépen mutatja éppen az AgH ezen színekpe, hogy bár a két elektronállapot közötti kölcsönhatás oly nagy, hogy az energianívók teljesen összekeverednek, az egyik $^1\Sigma$ állapot energianívói alacsonyabban kezdődnek és magasabb értékekhez tartanak, mint a másik $^1\Sigma$ állapot termjei, vagyis a molekulatermek egymást igen erős kölcsönhatás esetén is keresztezhetik, a megfelelő «potenciálgörbék» nem térnek ki.

Nem felel meg a tapasztalatnak WEIZEL idézett dolgozatának²³ az az elképzelése sem, mintha két kölcsönhatásban lévő elektronállapot nivóit valamilyen közepes r atomtávolság függvényében ábrázolva, a nivók egymáshoz rendelésénél ebben a koordinátarendszerben lépne fel a megoldandó probléma. Ha például $J=0$ esetén a B állandók alapján számított közepes r értékek függvényében ábrázoljuk valamely perturbálatlan rendszer nivóit, valóban szabályos összefüggést kapunk, de két ilyen

³⁵ GERŐ—SCHMID, Naturwissensch., 30, 1942.

rendszer kölcsönhatása távolról sem úgy megy végbe, hogy egymást csak a közelítőleg azonos r -hez tartozó értékek zavarván, ezen közepes r függvényében mutatkoznék a két görbe kitérése. Itt is elsősorban az fog szerepet játszani, hogy a két nívó egymáshoz mennyire esik közel és ezen kívül, mint az a $J(J+1)$ függvényében való ábrázolásból kitűnik, perturbáció esetén az állapotok keveredése folytán az egyes állapotokhoz tartozó közepes r értékek is igen erős változást szenvednek. A közepes atomtávolság függvényében tehát inkább egészen szabálytalan és a perturbálatlan energianívók adódó helyzetén alapuló kép fog mutatkozni. Érdemes még megjegyezni, hogy bár WEIZEL ezen elképzelést pusztán hozzárendelési kérdésekkel kapcsolatban tárgyalja, a dolgozatában szereplő ábrát kevéssel később HERZBERG már mint a potenciálgörbék metszésével kapcsolatos molekulaperturbáció szemléltetését idézi.³⁶

A perturbációhoz hasonló jellegű jelenségnek tekinthető a predisszociáció, mely ugyancsak két elektronállapot kölcsönhatásaképpen jön létre folytonos és diszkrét energiaspektrumrészek között. A hullámfüggvények a perturbációhoz hasonló módon keverednek, a forgási kvantumszámra és \pm szimmetriára vonatkozó kiválasztási szabályok természetesen itt is szigorúan érvényesek. Minthogy a folytonos spektrumrész egymáshoz képest mozgási energiával rendelkező atomok állapotának felel meg, a predisszociáció folytán stabil molekulaállapotok kapcsolódnak a molekula disszociált állapotával, ami fizikailag a molekula atomokká való szétesésének, vagy fordítva, atomokból való keletkezésének felel meg. A hullámegyenlet időtől való függésének figyelembe vételével a folytonos és diszkrét energiaspektrumrész kölcsönhatásaképpen bekövetkező ezen folyamat igazolható. A molekula szinképében a predisszociáció jelensége a vonalak intenzitásugrásában mutatkozik, míg a predisszociáció által zavart diszkrét term eltolódása csak akkor észlelhető, ha a zavaró rendszer diszkrét energianívókat is tartalmaz s így az eltolódás már diszkrét termék közötti perturbáció eredménye.

Kétatomos molekulák keletkezése csak ritkán történik atomok-

³⁶ HERZBERG, Ergebnisse d. exakten Naturwissenschaften, 10, 263, 1931.

ból és sokkal gyakoribbak a molekulareakciók, melyeknél a két-atomos molekula egyéb molekulákból jön létre. Eltekintve attól, hogy a kémiai reagensek legtöbbször nincsenek atomi állapotban, ennek oka elsősorban az, hogy a molekulareakciónál a keletkező részek mozgási energia alakjában vihetik magukkal a közben felszabaduló kötési energiát, míg két atom egyesülésekor ehhez általában nem áll rendelkezésre megfelelő harmadik rész. Az atomreakciók ennek megfelelően vagy hármas ütközés révén jönnek létre, mikor a két atom ütközésének időtartama alatt egy harmadik rész ugyancsak ütközés révén a kötési energiát magával viheti, vagy pedig úgynevezett falreakciók, melyeknél a keletkező molekulának az edény falán áll módjában felesleges energiáját leadni. Ha az ütköző atomok energiaösszegének magasságában a molekulának stabil energiatermje van, a megfelelő állapotok keveredése folytán az ütközés időtartama lényegesen megnövekedhetik, sokkal nagyobb lehetőség nyílik a harmadik résszel való ütközésre s így a molekula predisszociációs nivói egyben az atomokból való keletkezés szempontjából is fontos szerepet játszanak. Ez mindenesetre olyan vonása a kémiai reakciónak, melyet pusztán a vegyértékelmélet már nem ad vissza, mert taszító jellegű potenciálgörbével rendelkező atomok ütközése esetén is keletkezhetik stabil molekulaterm a megfelelő kontinuumnak stabil molekulaállapotokkal való keveredése folytán. A viszonyoknak ez a módosulása azonban éppen a predisszociáció jelenségében, nem pedig az egymást metsző taszító és vonzó jellegű potenciálgörbék kitérítésében veendő tekintetbe. A predisszociáció jelenségének az atomi reakciókban való szerepére mutat az a körülmény is, hogy a gázkisülések révén előállított molekulaszínképekben általában azok az elektronállapotok mutatkoznak erősen, melyeken egyben predisszociáció is észlelhető, melyeken tehát éppen a predisszociációs nivók révén válik valószínűbbé a molekulának ütköző atomokból való keletkezése.

A molekulaszínképek rendezése és az alkotó atomok energia-kombinációihoz való hozzárendelése legtöbbször az egymást metsző potenciálgörbék kitérésének elve szerint történt, melyből levonható legfontosabb következtetés éppen az, hogy a molekula

alapállapotát az alkotó atomok alapállapotához kell hozzárendelni, amennyiben azokból a molekula alapállapotának megfelelő fajta molekulaterm egyáltalában keletkezhetik. Hogy a rendelkezésre álló kísérleti anyag bővülése folyamán végül is ez a hozzárendelési elv tarthatatlannak bizonyult, azt az előzők alapján könnyen megérthetjük.

A CO molekula színeképe egyike a legjobban ismert és rendezett molekulaszíneképeknek. Mint azt SCHMID és GERŐ egyik dolgozatukban³⁷ igen meggyőző módon igazolták, a molekulánívóknak az atomtermkombinációkhoz való hozzárendelése egyértelmű módon megadható hét különböző elektronállapot predisszociációinak a hét legalsó C—O atomtermkombinációval való összeesése révén s ez a hozzárendelés teljes összhangban van a színeképekből levonható összes következtetésekkel, a megfelelő elektronütközési kísérletek eredményeivel és a szén párolgási hőjével kapcsolatban jelentkező összefüggésben is. A CO színképén azóta észlelt újabb adatok a hozzárendelés helyességét csak megerősítették. A CO $X^1\Sigma$ alapállapotának rezgési nívói nem ismeretesek a disszociációs határig, de az utolsó még ismert nívók távolságának aránylag lassú csökkenéséből valószínűnek látszik, hogy a nívók nem a legalsó $^3P-^3P$ atomtermkombinációhoz, hanem inkább az $^1D-^1D$ atomtermkombinációhoz tartanak. Az viszont mindenesetre megállapítható, hogy az $^5S-^3P$, illetve $^3P-^1S$ atomtermkombinációk magasságához tartó és aránylag erős kötést mutató négy triplett molekulaállapot potenciálgörbéi az alacsonyabban fekvő atomtermkombinációkból képezhető triplett állapotok taszító vagy vonzó jellegű potenciálgörbéivel metszésbe kerülnek és így azonos fajta kereszteződések is fellépnek.

HERZBERG a CO molekula nívóinak ezen rendezése ellen éppen a kitérés elv értelmében emel kifogást,³⁸ a CO potenciálgörbéinek kereszteződésén kívül vitatva a szén párolgási hőjére vonatkozó következtetéseket is. Az egész organikus kémia szempontjából igen nagy fontosságú szén párolgási hő ugyanis a szilárd

³⁷ SCHMID—GERŐ, Z. f. phys. Chem., (B), **36**, 105, 1937.

³⁸ HERZBERG, Chem. Rev., **20**, 145, 1937.

szénből és molekuláris oxigénből keletkező CO reakcióhőjének és az oxigén disszociációs energiájának ismeretében meghatározható a CO színeképből adódó disszociációs energiájának segítségével. A szén párolgási hőjének közvetlen meghatározására irányuló kísérletek viszont jelentős szórást mutatnak, aszerint hogy a vákuumban elpárolgott szén szál tömegesökkenéséből, az úgynevezett dinamikus módszerrel, vagy pedig a szénív egyensúlyi állapotában felvett gőznyomás-hőmérsékletgörbe segítségével, az úgynevezett statikus eljárással történik a meghatározás.³⁹ A színeképből adódó párolgási hő jól egyezik a dinamikus kísérletek eredményével, amennyiben feltételezzük, hogy a szilárd szén párolgása folyamán négyvegyértékű 5S atomok keletkeznek, ami tekintettel a szén kémiai viselkedésére, igen kézenfekvő feltevés. A statikus kísérletek kisebb párolgási hője akkor a keletkező 5S állapotú szénatomokon végbemenő szekunder folyamatok eredménye volna. HERZBERG ez ellen a felfogás ellen megint a potenciálgörbék kitérésére hivatkozik, azzal, hogy amennyiben a szénatomrács és a különálló szénatom kölesönhatása a vegyérték-elmélet felfogásában olyannak adódik is, hogy a 3P állapotú szénatomot a rács taszítja, míg az 5S állapotú atom közelítése kötésre vezet, a megfelelő potenciálgörbék kitérése folytán a szilárd szén párolgásának 3P állapotú atomokat kell eredményeznie. A CO színeképének pusztán ezen következtetéseken alapuló rendezése természetesen nem egyezik a szén párolgási hőjére vonatkozó újabb megállapításokkal sem, melyek közül WHITE-nek⁴⁰ a CN disszociációs energiájára, BAUGHAN⁴¹ és KYNCH—PENNEY-nek⁴² többatomos szénhidrogénekre vonatkozó megfontolásait idézzük s melyek közvetve mind a CO színekép SCHMID és GERŐ által megadott rendezését igazolják.

A CN molekula esetében a színekép adatai egymással összhangba szintén csak úgy hozhatók,⁴³ ha a molekula alapállapotát gerjesztett atomállapothoz rendeljük. Ugyanez látszik való-

³⁹ SCHMID—GERŐ, Bánya- és Kohómérnöki Közl., **9**, 173, 1937.

⁴⁰ WHITE, J. Chem. Phys., **8**, 459, 1940.

⁴¹ BAUGHAN, Nature, **147**, 542, 1941.

⁴² KYNCH—PENNEY, Proc. Roy. Soc. (A), **179**, 215, 1941.

⁴³ SCHMID—GERŐ—ZEMPLÉN, Proc. Phys. Soc., **50**, 283, 1938.

színűnek az N_2 és NO molekulák színekében is,²⁶ ahol azonban a rendelkezésre álló adatok még nem teszik lehetővé az atomtermkombinációk és molekulaállapotok végleges egymáshoz rendelését.

A kétatomos hidrid- és deuteridmolekuláknál viszont számos kísérleti eredmény fellépte teszi feltétlenül szükségessé a molekulaállapotoknak magasabb atomtermkombinációkhoz való rendelését, szemben az eredetileg feltételezett alapállapot-alapállapot szerinti hozzárendeléssel.^{44, 45, 46} Mint azt az idézett dolgozatok számos példán szemléltetik, az észlelt predisszociációk és termkonvergenciák ellentmondásmentes értelmezése semmiképpen sem lehetséges az eredeti elven alapuló hozzárendeléssel. Az elv fenntartása érdekében a földfémhidridek színekében többek között több észlelt molekulaállapot keletkezését kell feltételezni a legalsó atomtermkombinációkból, mint amennyi azokból a WIGNER—WITMER-féle megfontolások alapján csoportelméletileg egyáltalában keletkezhetik. Az összes ellentmondások azonban megszüntethetők, amint lemondunk róla, hogy a molekulaalapállapotot az atomalapállapotokhoz rendeljük és az atomtermsémát megfelelően eltoljuk, amikor is a sűrűbben elhelyezkedő gerjesztett atomtermkombinációk már kellő számban vannak az összes észlelt jelenségek értelmezésére.

A kétatomos hidridmolekulák esetében azért is megnyugtató a színeképeknek az a következtetése, hogy a legalsó atomtermek sok esetben alacsonyabban is fekszenek a legmélyebben fekvő molekulatermnél, minthogy ezek a hidridek, eltekintve a halogének hidridjeitől, közönséges körülmények között általában kémiailag nem is léteznek és csak a kisülési csövek gerjesztett viszonyai között keletkeznek. Az a körülmény, hogy az atomállapotok energetikailag stabilabbak a legmélyebben fekvő molekulaállapotnál is, a kémiai viselkedést is érthetővé teszi.

A kétatomos molekulák színeképeiről rendelkezésre álló és feldolgozott kísérleti anyag még meglehetősen hiányos. Az atom-

⁴⁴ GERŐ—SCHMID, Z. f. Phys., 111, 588, 1939.

⁴⁵ HULTHÉN, Z. f. Phys., 113, 126, 1939.

⁴⁶ GERŐ—SCHMID, Z. f. Phys., 115, 57, 1940.

állapotokhoz való hozzárendelés aránylag csak nagyon kevés molekula esetében tekinthető véglegesen megoldottnak, de a megfelelően ismert eseteknek jórésze valamilyen vonatkozásban ellentmondásba jut a potenciálgörbék kitérésének elméletével. A kísérlettel való összehasonlításból tehát mindenesetre megállapíthatjuk, hogy, szemben az általánosan elfogadott felfogással, a molekula perturbálatlan elektronállapotainak energianívóit meghatározó potenciálgörbék nem azonosak a kétcentrumprobléma sajátértékgörbéiképpen adódó s egymást azonos fajta esetében nem keresztező potenciálgörbékkel, amint az az elméleti megfontolásokból is következik. Természetesen részint a számítások gyakorlati keresztlvitelénél kiindulásul feltételezendő egyszerű viszonyok, részint a számítás folyamán szükségképpen felépő matematikai nehézségek következtében a vegyértékelmélettel kapcsolatos csereintegráloktól sem várható, hogy a kémiai kötésről minden esetben a tapasztalattal egyezést mutató, helyes képet nyujtsanak. Annak végleges eldöntésére azonban, hogy a meghatározott atomállapotok kompozíciója és antiszimmetrizálása révén nyert potenciálgörbék milyen jó közelítéssel szolgáltatják a molekula perturbálatlan energiaértékeit, a matematikai módszer tökéletesítésén kívül a szinképek pontosabb ismeretére is szükség van, tekintetbe véve azt a körülményt is, hogy a már ismert molekulaszinképek rendezése is sok esetben felülvizsgálatra szorul, mert a téves hozzárendelési elvhez való ragaszkodás folytán az eddigi eredmények sokszor megbízhatatlanok.

E dolgozat a m. kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében készült; az intézet igazgatójának, dr. POGÁNY BÉLA műegy. ny. r. tanár úrnak, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjának, legyen szabad hálás köszönetemet kifejeznem ennek lehetővé tételéért. Örömmel mondok e helyen is köszönetet dr. SCHMID REZSŐ egy. magántanár, műegy. adjunktus és dr. GERŐ LORÁND műegy. tanársegéd uraknak, akiknek ösztönzésére e dolgozat megszületett s akik a dolgozat megírása folyamán is sok értékes tapasztalatukkal és útbaigazítással állottak mellettem.

Valatin János.

DISCUSSION OF DIATOMIC MOLECULES WITHOUT THE TWO-CENTER MODEL.

After a summarising discussion dealing with quantummechanical states, their composition, the symmetry properties of atoms and the quantummechanical interpretation of valence, the motion of diatomic molecules is considered as a composition of the inner motions of the atoms referred to their mass centers and of the relative motion of the atoms referred to each others. In order to solve the wave equation, which contains besides the electronic coordinates the interatomic distance only, — obtained by selecting classes invariant to space rotations, characterised by the J rotational quantum number, and by the approximate separation of atomic angular coordinates, — the assumption is made, that the dependence of the molecular wave function on the electronic coordinates can be set up by the composition and antisymmetrisation of two atomic states. In this way the potential function in the second order linear differential equation allowing the determination of energy eigenvalues and the dependence of the interatomic distance is composed by exchange integrals typical for the chemical bond. The two-center model and the recurrence of the wave equation for diatomic molecules to the two-center problem are discussed and the consequences, involved for the two-center model by the behaviour of operators depending on a continuous parameter according to Neumann—Wigner, are sketched. Emphasising, that the draft afforded by the two-center model does not suit at all to the conditions of the molecule possessing discrete energy values, the solution of the molecular wave equation by composition of atomic states is confronted with its recurrence to the two-center model. The solution of the two-center problem leads also to molecular states made up by definite atomic states in first approximation. There is pointed out, that the effect of the simultaneous appearance of various atomic states is to take into consideration by the perturbation calculus of the discrete energy levels and not by the «avoidance» of the fictive energy curves of the two-center model. The simultaneous appearance of various atomic states results just in the perturbation and predissociation effects of molecular spectra. Some erroneous views, concerning perturbations connected with the avoidance principle of

potential curves are dealt with. Dinamical phenomena of chemical reactions, connected with predissociation, which cannot be accounted for by the valence theory, are grazed. Attention is called to discrepancies in the coordination of molecular and atomic spectral states appearing as consequences of the correlation rule of the two-center model. The conclusion is drawn, that the potential curves of electronic states of a molecule are not identical with the exact energy curves of the two-center model, but they are connected with the exchange integrals appearing in building up the molecular state from atomic states.

J. Valatin.

GALILEI KÍSÉRLETEI AZ ÜTÉS EREJÉNEK ÉS ENERGIÁJÁNAK A MEGMÉRÉSÉRE.

GALILEI az általa sajtó alá rendezett *Discorsi* 4-ik napján az egyik hajítási problémával kapcsolatban két kérdést említ, amelyeken — saját szavai szerint — életének sok-sok ezer óráján át elmélkedett. Ez a két kérdés a következő:

1 honnan származik az a nagy hatás, amely fellép, ha mozgó testek akadályba ütköznek, és

2. hogyan lehetne az ütés erejét és energiáját megmérni.

Már e helyen is említést tesz néhány eredményről, de bővebben foglalkozik velük a *Discorsi* 6-ik napján. Ezt a *Discorsi*-kiadást azonban már nem ő, hanem tanítványa: VIVIANI rendezte sajtó alá azon kéziratok alapján, amelyeket GALILEI fiától, Lorenzo-tól kapott.

E helyütt csak azon kétféle kísérletét ismertetem, amelyekhez a mai fizika szerint is fontos megjegyzéseket fűzött.

I. *Cölöpverés*. Verjünk cölöpöt leeső súly segítségével a földbe. Ejtsünk a cölöpre pl. 100 fontot négy könyöknyi magasságból és az a cölöpöt négy hüvelykkel verje beljebb a földbe. Az a súly, amely pusztán rátevéssel — esés nélkül — ugyanezt a hatást hozza létre, adja az ütés erejét. Legyen ez pl. 1000 font. A leeső súly két tulajdonságánál fogva hat: a súlyánál és a sebességénél fogva; ha a 100 fontot levonjuk az 1000 fontból, akkor a sebességtől származó hatás részére 900 font adódik.

GALILEI magát a súlyt *holt súlynak* nevezi és minthogy nála a súly és erő teljesen azonos fogalmak, azért bátran mondhatjuk, hogy a *holt erő* elnevezést nem LEIBNIZ használta először, hanem GALILEI, ki azután a kinetikai energia mai fogalmára az eleven erő elnevezést vezette be.

A cölöpverést tovább folytatva, GALILEI a következőképpen okoskodik. A súlyt újból és újból ugyanazon magasságból ejtve le, a cölöpöt mindig kisebb és kisebb mértékben fogja beljebb verni, mert a föld ellenállása mindig nagyobb lesz, de ezen hatások elérésére nem elegendő ugyanaz a holt súly — az 1000 font — hanem mindig nagyobb és nagyobb kell rátenni, tehát *ugyanazon* sebességből származó hatás részére mindig *nagyobb és nagyobb értéket* kapunk holt súlyban kifejezve. Az ütés ereje tehát *határozatlan* és végtelenbe nőhet sok ismétlés után. E miatt ez az eljárás-mód nem alkalmas a kitűzött célra.

Azt, hogy az ütés ereje mind nagyobb és nagyobb lesz, GALILEI a következő, szubjektív izomérzeten alapuló hatással magyarázza. Ejtsünk testet a tenyerünkre és érjen az oda, pl. 10 egységnyi sebességgel; ha az odaérkezéskor a tenyerünket ugyanakkora sebességgel mozgatjuk előtte, akkor nem érzünk ütest. Ha pl. a kezünk sebessége 4 vagy 1 egységnyi, akkor az ütés ereje 6, illetve 9 egységnyi, ha pedig a kezünk semmit sem mozdulna el, akkor az ütés teljes lenne és az ereje 10 egységnyi lenne.

Mint látjuk, GALILEI az ütés erejét azon sebességváltozással veszi arányosnak, amit az ütő test szenved, amíg a sebessége leszáll annyira, mint amekkora maximális sebességet az ütött test elér. GALILEI nem mondja ugyan, de gondolkodásmódjából következik, hogy a leeső súllyal is arányos az ütőerő, azért jogosan mondhatjuk, hogy az ütés erejét GALILEI az $m(v - v')$ szorzattal veszi arányosnak. Ez pedig a mai fizikai elnevezés szerint az *impulzus*. GALILEI is ismételten használja ugyanezen tartalommal az impulzus szót; többször mondja, hogy a mozgó testnek van impulzusa.

Hogy GALILEI valóban a mai értelemben vett impulzusra gondolt, bizonyítja a következő okoskodása is. Az ütött test a sebességét nem momentán éri el, hanem bizonyos idő alatt és az ütés végtelen sok apró momentumból összetettnek gondolható; lehetetlen tehát nem gondolnunk az $\int p dt$ -re. Ámde

$$\int p dt = m (v - v'),$$

tehát, mint látjuk, GALILEI teljesen arra a fogalomra gondolt, amit ma németül *Kraftstoss*-nak neveznek.

Annak az illusztrálására, hogy az ütést sok apró ütésből összetettnek lehet gondolni, amelyek mindegyike kifejti a maga hatását, és amelyek összege adja az egész hatást, azon példát hozza fel, hogy sok kis kalapácsütéssel nagy gerendát lehet látható mértékben tovább mozdítani, ami nem következne be, ha mindegyik kis kalapácsütés nem tette volna meg a maga hatását. GALILEI tehát gondolatban integrálokkal dolgozott.

GALILEI a leeső súly és a holt súly hatása között még egy igen fontos különbséget is lát. Míg a holt súly csak az első alkalommal tudja a cölöpöt beljebb verni, addig a leeső súly minden következő alkalommal és *minden leesés alkalmával munkát végez, mert az akadályt elmozdítja*. Látjuk, hogy GALILEI a munka szót a mai értelemben használja, tehát a mai munkafogalom nem CORIOLI-tól származik, mint azt általában gondolják; csak a pontos matematikai definíciója származik CORIOLI-tól.

Ezen kísérlettel kapcsolatban megállapítja GALILEI azt is, hogy az ütés erejének mértékét nem az ütő, hanem az ütött testben kell keresni, továbbá minden mérő kísérlet követelménye, hogy jól meghatározható feltételek mellett menjen végbe; tehát a jelen esetben az ütött test ellenállása állandó legyen, amelynek nagysága változtatható. Ilyen állandó ellenállás a *test súlya*.

II. Ezen alapszik a második kísérlete: *súlyemelés leeső test segítségével*. Gondoljunk egy csigát magasabb helyen megerősítve és vessünk át rajta erős zsineget. A zsineg két végére kössünk egyenlő súlyokat. Az egyiket helyezzük vízszintes szilárd lapra, a másikat pedig emeljük fel magasabbra és ejtsük le; amikor a zsineget éppen megfeszíti, akkor a másik súlyt megrántja, annak lökést, és így sebességet ad. GALILEI ezzel kapcsolatban két elgondolást tárgyal.

1. A mechanikai gépek törvényéből kifolyólag a megrántott testnek a rántás következtében nyert sebességénél fogva éppen akkora magasságra kell felemelkednie, mint amekkoráról a másik leesett, épúgy mint az inga-test is a legmélyebb pontjában elért sebességénél fogva a másik oldalon éppen akkora magasságra emelkedik fel, mint amily magasságból elindult. Amint látjuk, GALILEI szeme előtt itt az energiatörvény lebegett.

2. GALILEI maga mutat rá, hogy ez az első elgondolás helytelen, mert amikor a leeső test emelni kezdi a másikat, amelyik vele

egyenlő súlyú, akkor megszűnik a mozgató erő, tehát a két testnek egyenletesen kell tovább mozognia és pedig szerinte akkora sebességgel, mint amekkorával a zsineg megfeszítésének pillanatában bírt.

Mint látjuk, GALILEI a jelenséget kvalitatíve jól elemezte, de kvantitatíve nem, mert hiszen most már nemcsak a leeső test mozog, hanem a másik is. Ha GALILEI mélyebben elgondolja a tüneményt, akkor éppen a saját gondolkodásmódja alapján rá kellett volna jönnie, hogy a másik test mozgásbahozatalához impulzus kell, tehát a rántás után bekövetkező egyenletes mozgás sebességének kisebbnek kell lennie, a leeső test elért legnagyobb sebességénél.

GALILEI azután ezt a kísérletet oda módosítja, hogy a leejtendő súlyt kisebbnek veszi a másiknál (pl. 10-szer kisebbnek) és felveti a kérdést, hogy vajjon lehet-e várni, hogy ez a másiknak a rántáskor akkora sebességet ad, amelynél fogva oly magasságra emelkedhessen fel, amely magasság a súlyával fordítva arányos (tehát pl. 10-szer kisebbre).

A kérdés eldöntésére GALILEI a lejtőt hozza fel. Gondoljunk a lejtő csúcsára csigát erősítve, amelyen át zsinéget fektetünk; a zsineg két végére kötött súly akkor lesz egyensúlyban, ha súlyaik oly arányban vannak mint a lejtő hossza és magassága. A lejtő hosszában fekvő kötél végén levő nagyobb súlynak a lejtő hossza mentén az ellenállása akkora, mint a szabadon lelógó súlyé a függőleges mentén, tehát az az impulzus, amely a szabadon lelógó súlyt pl. annyira emeli fel, mint a mekkora a lejtő magassága, a lejtő hosszában fekvő nagyobb súlyt a lejtő hosszában ugyancsak ennyivel tolja el; ennek azonban a függőleges irányú komponense annyszor kisebb, mint ahányszor kisebb a lejtő magassága a lejtő hosszánál. Vagyis amely impulzus a szabadon lógó kisebb súlyt pl. 10 hüvelyknyire emeli, az a lejtő hosszában fekvő nagyobb súlyt annyszor alacsonyabbra emeli, ahányszor hosszabb a lejtő a magasságánál. Ezen az alapon a csigánál is várni lehet, hogy a megrántott nagyobb súlyú test annyszor kisebb magasságra emelkedik, ahányszor nagyobb a súlya a kötél másik végére kötött test súlyánál.

Ez az okoskodás sem egészen helyes, mert hiszen a kötél meg-

feszítésének pillanatától kezdve nemcsak a nagyobb súlyú test emelkedik felfelé, hanem a másik is mozog lefelé, tehát a rántás pillanatában nem veszítette el teljesen a sebességét.

Amint e vázolt gondolatmenetkből látni lehet, GALILEI ezen kísérleteivel nem az ütközés törvényeit akarta megállapítani,¹ hanem a mozgó test impulzusát és kinetikai energiáját akarta megmérni az emelendő súly nagyságából és emelkedésének magasságából, tehát az *impulzus- és energia-törvényt* kereste kísérleti alapokon.

GALILEI még egy rendkívül érdekes megállapítást is végez ezen gondolatmenetei során. Így okoskodik. A testeknek kétféle ellenállása van; az egyik a természetes ellenállás, amit azzal fejezhetünk ki, hogy nehezebb 100 fontnyi súlyt felemelni, mint 50 fontnyit, a másik a távolságra vonatkozik, amelyen át a mozgásnak történnie kell, amit azzal jellemezhetünk, hogy nehezebb egy követ 50 lábnyira elhajítani mint 25 lábnyira. Ennek a kétféle ellenállásnak kétféle hatóerő felel meg. Az egyiknél nyomás van lökés nélkül; ez csak bizonyos nagyságú ellenállást tud elmozdítani, de akármekkora távolságon át, tehát az ellenállással arányos és nem a távolsággal. A másiknál ütés van; ez bármekkora akadályt el tud mozdítani, de csak véges távolságon át, tehát ez nem az ellenállással, hanem a távolsággal van arányban. Mint látjuk, GALILEI az egyiket a testeknek a súlyukban, a másikon pedig a sebességükben megnyilvánuló erejét, vagyis a mai kifejezésünk szerint energiáját érti. Kifejezi még GALILEI azt is, hogy ezek az erők egészen más sajátosságúak, kétséges tehát, hogy lehet-e őket egymással arányba állítani, vagyis a mai fizika nyelvén: felismerte, hogy a kétféle erő fizikai jellege más és különböző jellegű fizikai mennyiségeket nem lehet egymással mérni.

Hogy GALILEI nem tudott biztos eredményt elérni, annak oka egyrészt az, hogy a súly és tömeg fogalmát nem különítette el egymástól, másrészt meg az, hogy hiányoztak a mértékegységek.

¹ Sem DÜHRING a «Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik», sem MACH a «Die Mechanik in ihrer Entwicklung» c. művében nem mutat rá erre a tényre, hanem a 4-ik napi beszélgetésben említett rövid megállapításokból helytelenül arra következtetnek, hogy GALILEI az ütközés problémájával foglalkozott.

GALILEI e kísérleteivel oly célokat tűzött ki maga elé, amelyeket ezek nélkül megoldani nem lehetett. Érezte ezt ő maga is, azért is nem adta ki ő maga az általa sajtó alá rendezett *Discorsi*-ban.

Nagy L. József.

GALILEIS EXPERIMENTE ZUM MESSEN DER KRAFT DES SCHLAGES.

Der Verfasser erörtert den Inhalt des 6-ten Tages der *Discorsi* von Galilei und zeigt, dass Galilei hier nicht die Gesetze des Stosses suchte, wie es einige Forscher behaupteten, sondern dass er die Kraft des Schlages, den Kraftstoss messen wollte. In diesen Untersuchungen ist Galilei dem Impuls- und Energiesatz nahe gekommen. Er erkannte auch, dass das Gewicht und der Impuls eines bewegten Körpers im physikalischen Sinne verschiedene Dinge sind mit grundverschiedenen Eigenschaften, die man also miteinander nicht vergleichen kann.

Josef L. Nagy.

FIZIKATANÍTÁS ÉS KISÉRLET.

E rövid cikk keretében a fizikának főképpen a középiskolai tanítására gondolok. Rá akarok mutatni arra, hogy bármilyen fokon tanítjuk is a fizikát, tanításunk módszerére vonatkozólag elsősorban jó tájékoztatást nyújt a fizikának, mint tudománynak a módszere, másodsorban pedig az a körülmény, hogy milyen korú és értelmi fejlettségűek a tanítványaink.

A fizika módszerének leglényegesebb sajátossága az, hogy *mérhető jelenségekkel dolgozik*. A fizikai mérés fogalma nem magától értetődő és a fizika a mérési módszereit gondosan meghatározza és céljainak megfelelően választja ki. Az egyszerű mérés abban áll, hogy a mérő-egységül választott mennyiséget a mérendő mennyiség mellé helyezzük és megszámloljuk, hogy az abban hányszor van meg, vagy a kettő viszonzszámát meghatározzuk. Ezt a tiszta eljárást azonban gyakran nem tudjuk keresztülvinni, mikor is indirekt úton, már ismert törvények alkalmazásával jutunk a keresett értékhez. Mértékrendszerünk elemei pszichológiai alapokon nyugszanak, nevezetesen a szemléletes világ elemeinek (tér, idő, tömeg) mérésére szolgálnak a közismert, tetszésszerűen megválasztott cm., sec., gr. egységek.

A további mérhető mennyiségeket azután a természet jelenségeinek a segítségével, gondos körütekintéssel úgy választjuk ki, hogy azok jellege az említett három alapegységgel (cm., sec., gr.) adva legyen és ezzel adva van azok mérési módja is. Röviden úgy fejezzük ezt ki, hogy a fizikai fogalom definíciója megadja annak a mérési módját is. Ilyen módon, mihelyt elhagyjuk a fizika egyszerűbb területeit, látszólag komplikált fogalmakhoz jutunk.

A fizika tudománya a fizikai fogalmak rendszeréből áll, a tanításánál olyanféle helyzetben vagyunk, mint egy új nyelv tanítása-

nál; talán még komplikáltabb a feladat, mert nemcsak új szavakat, új szabályokat, hanem új fogalmakat és ennek megfelelően új szemléleteket is kell tanítanunk. A fogalmak megválasztása nem magától adódik, hanem gondos megfigyelés és próbálgatás után célszerűségi szempontok szerint történik. Egyszerűbb esetekben a köznyelv alkalmazza ezen fogalmakat, ha nem is olyan szabatosan és tudatosan, mint a tudomány, de szemléletesen — a legtöbb esetben — helyesen. A gyakorlati életben sok jelenségnek és sok fogalomnak szemléletes ismerete nélkül nem is tudnánk élni, sőt azt mondhatjuk, hogy szemléletesen, vagy érzék szerint, bizonyos fizikainak nevezhető vonatkozásokat az állatok is ismernek. (Pl. az állat elpusztulna, ha nem érezné, hogy egy meredek széléről nem szabad lelépnie.) Ilyen esetekben célszerű köznapi tapasztalatokra hivatkozni és ezek alapján tudatosítani a fizikai fogalmakat. Egyes egyszerűbb mechanikai, hő- és fénytani jelenségek és szemléletek után azonban már nagyrészt kísérletekre vagyunk utalva.

A tanításnál tehát ki kell választanunk a jelenségeknek azt a sorrendjét, amelyik a fogalmak egymásutáni felépítését lehetővé teszi. Az a tény, hogy ez a sorrend nagy vonásokban a tankönyvek fokozatos fejlődésével meglehetősen ki van alakulva, nem von le semmit abból a szükségletből, hogy a tanítónak tudatában kell lennie ezen sorrend logikai és lélektani jelentőségének.

Elsősorban jön a jelenség bemutatása, aminek a pszichológiai jelentősége abban van, hogy bemutatja annak reálítását. A tényeknek, a valóságoknak nagy meggyőző erejük van, ami azonban nem a látványosságban rejlik, hanem a minden emberi mesterkedéstől független létezésben. A trükkfilmek lehetnek igen látványosak, de tudományos gondolatkörünket teljesen hidegen hagyják, mert nincsen reálításuk. Fizikai eszközök is vannak, melyek, mint modellek hasznosak (pl. a Mach-féle hullámgép), mert elképzelésünket segítik, de mindig nagyobb meggyőző erővel bír egy valóságos jelenség. Éppen e miatt a kísérleteknek a jelentősége megnő ott, ahol olyan jelenségekről van szó, amelyek a közvetlen szemlélhetőség határán túl esnek, pl. elektromos rezgések, rádióaktív sugárzások, atomfizikai folyamatok, stb.

Másodsorban ki akarjuk emelni ama tényezőket és jellegeket, melyek egy összetett jelenségre mérvadók. Ezt úgy érzük el, hogy

az egyes tényezőket külön variáljuk és hatásukat megállapítjuk. Ezáltal ezeket a tényezőket szemléletessé tudjuk tenni, sikerül őket élesen jellemezni és más tényezőktől elválasztani és szerepüket más jelenségesoportban felismerni.

Bemutatjuk tehát, hogy e fogalmakon keresztül a jelenségek lefolyását és változásait más módon tudjuk követni, mint csak naív szemlélettel. Itt tehát a tanulót a jelenségeknek egy másféle szemlélésére tanítjuk meg, mint a naív, köznapi szemlélési mód. Pl. a kathódsugár és mágneses elhajlítása egy naív szemlélőre csak változó fényjelenség, míg a fizikus szempontjából gyorsan haladó elektromos korpuszskulák, elektromos áram; azután a BIOR—SAVART törvény értelmében mágneses térnek elektromos áramra való hatása — amiket quantitative is fel tudunk írni — azután pedig elektromos ütközés által való fénygerjesztés stb.

A törvényhez már általában mérések útján jutunk. A tanításnál ritkán lehet ezeket jól keresztülvinni, részben eszközök, részben idő hiánya miatt; de ez már nem olyan nagy hiány, ha a qualitativ bemutatás jó és ha az egyes mennyiségek mérési módja a megfelelő helyen alaposan ismertette volt. Így jutunk tehát a mérési módszerek és mérő eszközök bemutatásához, mint fontos tanítási mozzanathoz.

A kísérletek bemutatásánál tehát eleve tudnunk kell, hogy mi a célunk velük a tanításban. A kísérletek pszichológiai szerepének ilyen tudatosítása nagymértékben előmozdítja azt, hogy tanításunk plasztikus legyen és hogy a tanulóban már kezdettől fogva kialakuljon az az érzés, hogy nem valami mesterkélt elvek szerint lerögzített eljárásokról van szó, hanem egy fogalmi és szemlélődési rendszer felépítéséről, amelyik lehetővé teszi a természet jelenségeit quantitative követni.

Ha világos nekünk az, hogy a kísérletek egyik legfontosabb szerepe a fogalmak kialakítása, akkor magától adódik, hogy téves a középiskolai tanítási módszerek tárgyalásában az az újabban gyakran hangoztatott általános követelmény, hogy a tanuló a kísérletből maga vonja le a következtetést. Ez csak akkor és ott lehetséges, ahol a tanuló már ismeri a szükséges fogalmakat. Azonban mikor egy új fogalom bevezetéséről van szó, a tanuló erre az új fogalomra magától nem jöhet rá. Mutathatunk sok kísérletet,

de a tanuló magától nem jöhet rá pl. a tehetetlenségi nyomaték fogalmára, vagy a törésmutató fogalmára és így tovább. Hogy didaktikai tárgyalásokban gyakran ezt a fentemlített túlzott — valójában naiv — követelést állítják fel, az részben onnan származhatik, hogy sokszor a köznapi tapasztalat már szolgáltatja — legalább is szemléletesen — azon fizikai fogalmak képét, ha nem is pontosan, amelyek alapján már lehetséges a kísérletet értelmezni. Azt azonban lehetetlen kívánni, hogy a tanuló a kísérlet bemutatása után rájőjön a polarizációs sík vagy az elektromos potenciál fogalmára. Köznapiilag még nem ismert jelenségeknél a fogalmakat először szemléletesen ki kell alakítani a tanulóban. Ez nem azt jelenti, hogy a tanuló öntevékenységet ne vonjuk be a tanításba, hanem csak azt, hogy ne kívánjunk tőle olyant, amire ő még nincsen előkészítve. Viszont, amikor mi neki tudatosítjuk, hogy az elektromos áram fogalmával kapcsolni kell elektromos korpuszculák mozgását, tehát elektromosságot és mozgási képet; mágneses hatásokat, tehát erővonalképeket; hőhatást, tehát hőmennyiségi és hőmérsékleti szemléleteket: igenis az érzékeinek és értelmének intenzív tevékenységét vesszük igénybe. Ha ő most már az elektromos áram elnevezésének hallatára mindezeknek a képeit maga elé idézi, csak akkor képes kiválasztani az adott esetben alkalmazandó szempontot, azaz a hatásra vonatkozó törvényt, aminek alapján aztán felelhet a feltett kérdésre.

Miután fogalmak kialakításáról van szó, éles különbséget kell tennünk a fizikának az alsóbb és felsőbb fokozatban való tanításánál. Ez a különbség magától adódik a tanuló értelmi fejlettségének a 12—14 ill. 16—19 éves kornak megfelelő különbözőségéből. Az alsóbb fokozatban elég helyes szemléletet adni. Tehát nem adunk definíciókat, csak megmutatjuk, hogy az érzékeivel mit foghat fel a jelenségekből és e szemléleteket a helyes névvel jelöljük. A felsőbb fokozatban a dolgok újra sorra kerülnek, a szemléletek jobban megrögződnek, kapcsolódnak és most jön hozzája a fogalom szabatos meghatározása, amely most már — éppen, mert a szemléletek megvannak — nem lesz üres szó.

Ezekután szinte magától adódik, hogy arranézve sem lehet egységes szabályt felállítani, hogy a kísérletet miképpen iktassuk be a tárgyalásunkba. Ez pedagógiai érzék és egyéniség dolga, de azt

kívánni, hogy először jőjön mindig a kísérlet stb., azt nem lehet. Ez túlságos egyszerű schematizálása volna a modern, pszichológiai alapokon felépült tanítási elveknek. A pszichológiai alapot a fogalmak kialakulásában is számba kell venni. De számba kell venni azt a fizika tanítója egyéniségében is. Végül is a fizika tanítója egy bizonyos logikus rendszerben látja a fizikát, mint tudományt és csak természetes, hogy csak ennek a szellemében járhat el. Ha ez az ő egyéni látásmódja megfelel a fizika módszerének is, a tanuló szellemi fokának is, akkor a tanítása jó lehet még akkor is, ha egy másik — szintén jó — tanítási eljárással szemben különbséget mutat fel. Tehát a tudományos anyagnak a pedagógiai szempontok szerinti szerves felépítése a fontos. Talán mondhatnók, hogy ha a tanuló egyénisége fontos, a tanár egyénisége is fontos és ha reá egy nem neki megfelelő formát kényszerítenek, az eredmény nem lehet jó. Tehát a tanítás megítélésénél nem célszerű merev formák után indulni.

A kísérletek technikája legyen egyszerű, áttekinthető; nem célszerű másodrendű részletekbe bocsátkozni, mert ez a tanítás egész menetét mellékvágányra tereli. Ugyancsak csinján kell bánni az alkalmazhatóság kérdésével is. Nem ez adja meg egy jelenségnek az értékét. A törvény értéke az ismeretben van és abban, hogy az egy láncszemet alkot ismereteink rendszerében, ami nélkül egy csomó más kérdés nem oldható meg. A gyakorlati alkalmazhatósággal való túlsok foglalkozás felületességhez is vezethet, mert azt az érzetet keltheti, hogy az alkalmazás már könnyű, pedig annak éppúgy megvan a maga tudománya, amit nem lehet csak pár szóval elintézni. (A tudományegyetem mellett ott van a műegyetem.)

A gyakorlati alkalmazások hangsúlyozása talán abból ered, hogy igazolni akarjuk magunkat a sok precíz részlet tanításáért, mintha az alkalmazhatóság adná meg a fizika értékét. Ezzel szemben a fizika tanításának olyan messzeható, formáló értéke van, hogy az már magában indokolja a tanítását. A fizikai fogalmakon keresztül megtanulunk egy olyanfajta természetszemlélési módot, ami egyedül teszi lehetővé, hogy a jelenségekben egységesen — kvalitatív és kvantitatív módon — lépésről-lépésre eligazodjunk. Ez a szemlélődési mód nemcsak a fizika területén formálja és

fegyelmezi értelmünket, hanem a természettudományok egész területén döntő módon irányítja gondolkozásunkat, tehát a természettudományi műveltségnek úgy fogalmi, mint módszerei szempontból az alapját képezi.

Gyulai Zoltán.

PHYSIKUNTERRICHT UND EXPERIMENT.

Die Betrachtungen beziehen sich hauptsächlich auf Mittelschulen und trachten eine bewusste Antwort auf die Frage zu geben: was die Rolle des physikalischen Experimentes im Rahmen des Physikunterrichtes ist. Zu der Lösung der Frage dient die Methode der Physik als Wissenschaft. In dieser methodischen Schematisierung besteht die Wissenschaft der Physik in ihrem Begriffssystem. Im Unterricht wollen wir also in erster Linie die Begriffe im Schüler ausbilden. Viele Erscheinungen kann man nur mit ganz neuen Begriffen verstehen. Mit den Begriffen werden anschauliche Bilder, Sinneseindrücke verknüpft, welche den anschaulichen Inhalt des Begriffes bilden. Die Begriffe werden durch Messungen auch zahlenmässig gefasst, also die Messmethoden und Messapparate gehören in den Rahmen des Unterrichtes. Die Experimente dienen also zur Vorführung der Naturerscheinungen, weiter zur Veranschaulichung der zweckmässig gewählten Begriffe und wieder andere Versuche führen die Messmethoden und Messapparate vor.

Aus der Tatsache, dass die Begriffe im Schüler zuerst ausgebildet werden sollen, folgt, dass man den Vorgang nicht schematisieren kann und man nur dort verlangen kann, dass die Schüler aus dem Experiment den richtigen Schluss ziehen sollen, wo alles schon begrifflich vorbereitet ist.

Z. Gyulai.

KITÜZÖTT FELADATOK.

(A megoldásokat — mindegyiket külön lapra írva — a következő címre kérjük: EGERVÁRY JENŐ, Budapest, IV., Kecskeméti-utca 4.)

17. Valamely könyvtárban az l hosszúságú látogatási idő alatt A egyfolytában a , B pedig b ideig tartózkodik. Annak a valószínűsége, hogy akármelyikük a látogatási idő valamely időközében érkezék meg a könyvtárba, az időköznek a hosszával egyenesen arányos (természetesen azzal az egy megszorítással, hogy legkésőbb a látogatási idő vége előtt a , illetőleg b idővel meg kell érkezniök). Mi annak a valószínűsége, hogy A és B a könyvtárban találkozzék?

(Veress Pál)

18. Az $1, 2, \dots, n$ számokból $(n-1)$ -edosztályú ismétléses variációkat alkotunk. Mi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen (v_1, \dots, v_{n-1}) variációhoz található az $1, 2, \dots, n-1$ számoknak olyan (p_1, \dots, p_{n-1}) permutációja, melyre $v_i \leq p_i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$)?

(Hajós György)

19. Kimutatandó a következő azonosság:

$$\prod_{v=1}^n (a_{v1}^2 + a_{v2}^2 + \dots + a_{vn}^2) - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \prod_{v=k+2}^n (a_{v1}^2 + a_{v2}^2 + \dots + a_{vn}^2) \cdot \sum_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1})} \begin{vmatrix} a_{1\lambda_1} & a_{1\lambda_2} & \dots & a_{1\lambda_{k-1}} & \sum_{\mu=1}^n a_{1\mu} a_{k+1, \mu} \\ a_{2\lambda_1} & a_{2\lambda_2} & \dots & a_{2\lambda_{k-1}} & \sum_{\mu=1}^n a_{2\mu} a_{k+1, \mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k\lambda_1} & a_{k\lambda_2} & \dots & a_{k\lambda_{k-1}} & \sum_{\mu=1}^n a_{k\mu} a_{k+1, \mu} \end{vmatrix}^2 \right\},$$

ahol a $\sum_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1})}$ összegezés az $1, 2, \dots, n$ számok összes $(k-1)$ -edosztályú kombinációira terjesztendő ki és a $\prod_{v=n+1}^n$ szorzat 1-et jelent.

(Egerváry Jenő)

MEGOLDOTT FELADATOK.

9. Az n -dimenziós tér rácsvektorának nevezzük az olyan vektort, amely két rácpontot köt össze. Bebizonyítandó, hogy a tér összes rácsvektorai akkor és csak akkor állíthatók elő n adott $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ rácsvektor egész együtthatós lineáris kompozíciójaként

$$\mathbf{r} = k_1 \mathbf{r}_1 + k_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + k_n \mathbf{r}_n$$

alakban (k_i egész szám), ha az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ vektorok koordinátáiból alkotott determináns abszolút értéke 1. (Veress Pál)

A 9. feladat első megoldása.

Szükséges és elegendő, hogy a koordinátatengelyekkel párhuzamos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ egységvektorok előállíthatók legyenek:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{v=1}^n k_{iv} \mathbf{r}_v,$$

ahol k_i egész szám. Legyen $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ és az r_{uv} számok determinánsa $|r_{uv}| = r$. Az r_{uv} -höz tartozó algebrai adjungáltat R_{uv} -vel jelöljük. A fenti egyenletet komponenseire bontva a következő lineáris egyenletrendszerrel kapjuk:

$$\begin{aligned} r_{11} k_{i1} + r_{21} k_{i2} + \cdots + r_{n1} k_{in} &= 0, \\ r_{12} k_{i1} + r_{22} k_{i2} + \cdots + r_{n2} k_{in} &= 0, \\ &\vdots \\ r_{1i} k_{i1} + r_{2i} k_{i2} + \cdots + r_{ni} k_{in} &= 1, \\ &\vdots \\ r_{1n} k_{i1} + r_{2n} k_{i2} + \cdots + r_{nn} k_{in} &= 0. \end{aligned}$$

A Cramer-szabály szerint világos, hogy a megadott feltétel elégséges.

Az előállításnak természetesen szükséges feltétele az, hogy $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ lineárisan független, tehát $r \neq 0$ legyen. Minthogy

$$k_{ij} = \frac{R_{ij}}{r},$$

r osztója minden R_{ij} -nek, hiszen k_{ij} a feltevés szerint egész szám. Így egyrészt

$$|R_{ij}| = |rk_{ij}| = r^n |k_{ij}|,$$

másrészt (mint r aldeterminánsaiból alkotott determináns) $|R_{ij}| = r^{n-1}$, tehát

$$r |k_{ij}| = 1.$$

$|k_{ij}|$ egész szám lévén $r = \pm 1$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

(Fáry István)

*

A 9. feladat második megoldása.

Ha az $r = k_1 \mathbf{r}_1 + k_2 \mathbf{r}_2 + \dots + k_n \mathbf{r}_n$ vektorok kezdőpontját a koordináta-rendszer origójába helyezzük, a végpontok általánosabb értelemben vett pontrácsot alkotnak. Ez a rács olyan elemi rácsparalelotoptokból rakódik össze, melyeknek egyik csúcsából kiinduló éleit éppen az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ vektorok alkotják. Tartalmának mérőszáma pedig az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ vektorok koordinátáiból alkotott determináns:

$$D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n).$$

Hogy a szóbanforgó \mathbf{r} vektorok összessége valamennyi rácsvektort tartalmazza, az pontosan azt jelenti, hogy az előbb definiált elemi rácsparalelotoptok belsejében és határára — a csúcsokat nem tekintve — az n -dimenziós térnek nincs közösleges rácspontja. Az pedig ismeretes,¹ hogy ez akkor és csak akkor következik be, ha a rácsparalelotopt tartalmának mérőszáma 1, vagyis $|D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)| = 1$.

(Kárteszi Ferenc)

A 9. feladat megoldását még beküldötték: BEKE MANÓ, GÁL ISTVÁN, SÁNDOR GYULA és TURÁN PÁL.

*

10. Igazoljuk a következő integrál-összefüggéseket:

$$a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi x^2}}{1+x^2} dx = 2\pi e^{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\pi x^2} dx,$$

$$b) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{ch} \pi x} = 2 - \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Feldheim Ervin})$$

¹ Lásd pl. HAJÓS GYÖRGY: A rácsparallelogrammokról, Mat. és Fiz. Lapok 48 (1941), 398–400 és RÉDEI LÁSZLÓ: A rácsparallelogrammokról, Mat. és Fiz. Lapok 49 (1942), 73–75.

A 10. feladat megoldása.

Az *a)* egyenlőség bizonyítása. Az ismert²

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-(1+t^2)A^2}}{1+t^2} dt = \sqrt{\pi} \int_0^A e^{-a^2} da \quad (A > 0)$$

egyenlőségből $A = \sqrt{\pi}$ és $a = \sqrt{\pi}x$ helyettesítéssel adódik:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-(1+t^2)\pi}}{1+t^2} dt = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} da = 2\pi \int_0^1 e^{-\pi x^2} dx,$$

azaz

$$\pi - e^{-\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi t^2}}{1+t^2} dt = 2\pi \left[\int_0^{\infty} e^{-\pi x^2} dx - \int_1^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right].$$

Minthogy pedig $\int_0^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{2}$, azért

$$e^{-\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi t^2}}{1+t^2} dt = 2\pi \int_1^{\infty} e^{-\pi x^2} dx, \quad \text{q. e. d.}^3$$

(Kilczer Gyula)

A *b)* egyenlőség bizonyítása. Az integrandus páros függvény lévén, a kérdéses integrál:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{ch} \pi x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi x} dx}{(1+x^2)(e^{2\pi x} + 1)}.$$

A kezdőpont köré vonjunk $R = 1, 2, 3, \dots$ sugárral a felső félsíkon félkört. Ezen a félkörön vett I integrál határértéke, ha R végtelenné válik: 0.⁴ Így tehát a keresett integrál értéke a reziduumok összege szorozva $2\pi i$ -vel. E szerint csak a félkör belsejében lévő pólusokhoz tartozó reziduumokat kell kiszámítani. Az $1+x^2$ -ből eredő pólus a felső félsíkon: i , az $e^{2\pi x} + 1$ -hez tartozó pólusok pedig $\frac{2k+1}{2}i$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Az i -hez tartozó reziduum $2\pi i$ -szerese:

$$2\pi i \frac{e^{\pi i}}{2i(e^{2\pi i} + 1)} = -\frac{\pi}{2}.$$

² L. pl. SERRET—SCHEFFERS, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung V. kiadás, II. k. 193. l.

³ Rovatunk lezárása után kaptuk BEKE MANÓ nyug. egy. tanár úr szíves értesítését, hogy az *a)* egyenlőség DIRICHLET «Vorlesungen über bestimmte Integrale» (Braunschweig, 1904) c. könyvének 202. oldalán található (2) képletnek is speciális esete.

⁴ L. pl. LINDELÖF, Calcul des residus (Paris, 1905) 33. lapján levő jegyzetet.

Az $e^{2\pi x} + 1$ -hez tartozó reziduumok meghatározása céljából vegyük figyelembe, hogy

$$\begin{aligned} e^{2\pi x} + 1 &= e^{2\pi \left(x - \frac{2k+1}{2}i + \frac{2k+1}{2}i\right)} + 1 = -e^{2\pi \left(x - \frac{2k+1}{2}i\right)} + 1 = \\ &= -\left[1 + 2\pi \left(x - \frac{2k+1}{2}i\right) + \dots\right] + 1 = -2\pi \left(x - \frac{2k+1}{2}i\right) + \dots \end{aligned}$$

tehát a reziduum $2\pi i$ -szerese:

$$\begin{aligned} -2\pi i \frac{e^{\pi \frac{2k+1}{2}i}}{2\pi \left[1 - \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right]} &= (-1)^{k+1} \frac{4i}{2\pi [4 - (2k+1)^2]} \cdot 2\pi i = \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot 4}{(2k+1)^2 - 4} = (-1)^{k+1} \frac{4}{(2k+3)(2k-1)}. \end{aligned}$$

E $2\pi i$ -szeres reziduumok összege az abszolút konvergens

$$4 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)(2k-1)}$$

végtelen sor, mely még így is írható:

$$\sum_0^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3} \right).$$

E sor első n tagjának összege

$$s_n = 2 \pm \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right),$$

tehát a keresett összeg $\lim s_n = 2$. Ezzel kimutattuk, hogy $l = 2 - \frac{\pi}{2}$.

(Beke Manó)

A 10. feladat mindkét részének megoldását még beküldötte SÁNDOR GYULA⁵ és TURÁN PÁL.

*

⁵ Elkésve érkezett; az a -ra adott bizonyítását legközelebb közöljük.

11. Legyen P_1, P_2, \dots, P_{10} a tér tíz tetszőleges pontja, amelyek közül bármely négy nincs egy síkban. Eldöntendő, hogy annak az öt egyenesnek, melyben a

$$P_1P_2P_3, P_2P_3P_4, P_3P_4P_5, P_4P_5P_6, P_5P_6P_7$$

síkok rendre a

$$P_6P_7P_8, P_7P_8P_9, P_8P_9P_{10}, P_9P_{10}P_1, P_{10}P_1P_2$$

síkokat metszik, van-e (és hány) közös metszőegyenesük, valahányszor a P_1, P_2, \dots, P_{10} pontok egy másodrendű felületen fekszenek. (Egerváry Jenő)

A 11. feladat megoldása.

Jelölje P_0, P_1, \dots, P_9 a tíz pontot (a 10-es indexet 0-val cseréltük fel) és S_0, S_1, \dots, S_9 a tíz síkot, mégpedig legyen

$$S_i = [P_{i-1}P_iP_{i+1}], \quad (1)$$

ahol a 10-es index 0-val pótlendő. Ehhez hasonlóan tehát

$$P_i = (S_{i-1}S_iS_{i+1}).$$

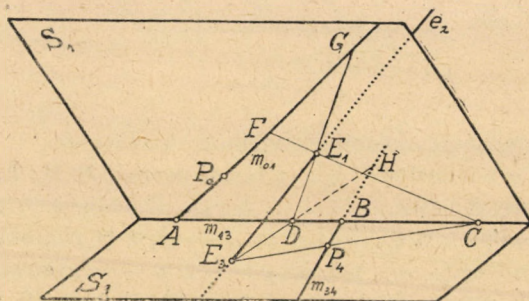
A feladatban szereplő öt egyenes legyen

$$e_1 = S_1S_6, \quad e_2 = S_2S_7, \quad e_3 = S_3S_8, \quad e_4 = S_4S_9, \quad e_5 = S_5S_0. \quad (2)$$

Más, itt nem szereplő S_i, S_k síkok metszésvonalát m_{ik} -val jelöljük.

Feladatunk annak megállapítása, hogy ennek az öt egyenesnek van-e közös tranzverzálisa, ha a tíz pont egy másodrendű felületen fekszik. Bebizonyítjuk, hogy általában nincs, amennyiben kimutatjuk, hogy az öt e_i egyenes előre, tetszőlegesen felvehető.

Felvesszük az öt e_i egyenest és (2)-nek megfelelő módon a tíz síkból kilencet. Legyen a még fel nem vett sík S_2 , mely e_2 -n fog keresztül

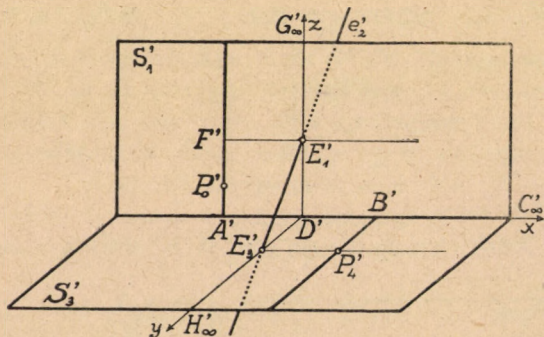


1. ábra.

menni. (1)-ből kitűnik, hogy a P_1, P_2, P_3 pontok még ismeretlenek, a többi hét pedig már meg van határozva. A következőkben az egész rendszerből csak a következő részlet érdekel bennünket; e_2, S_1, S_3 , ezek metszéspontjai, ill. metszésvonala E_1, E_3, m_{13} (1. ábra), továbbá az ezekre illeszkedő P_i pontok. S_1 -ben fekszik az m_{01} egyenes és ezen a már meghatározott P_0 s a még ismeretlen P_1 ; ugyanígy S_3 -ban m_{34} a meglévő P_4 s a hiányzó P_3 pontokkal; végül P_2 az m_{13} egyenesen keresendő. Feladatunk az e_2 -n átmenő S_2 síkot úgy meghatározni, hogy az m_{01}, m_{13}, m_{34} egyenesekből általa kimetszett P_1, P_2, P_3 pontok a többi hét ponttal együtt egy másodrendű felületen fekszenek.

Legyen az S_0, S_1, S_3 síkok, tehát az m_{01}, m_{13} egyenesek közös pontja A , hasonlóan $(S_1 S_3 S_4) = (m_{13} m_{34}) = B$, továbbá az $[e_2 P_4]$ síknak m_{13} -mal és m_{01} -gyel való metszéspontjai C és F . Legyen D az A, B, C pontok negyedik harmonikusja az m_{13} egyenesen. Messe végül az $[e_2 D]$ sík az m_{01} és m_{34} egyeneseket a G és H pontokban.

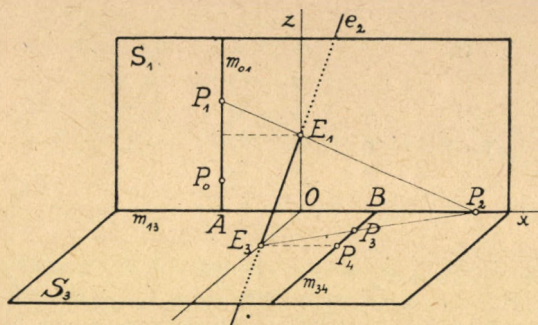
A számítás egyszerűsítése végett alakzatunkat egy kollineáris transzformációnak vetjük alá, hiszen nyilvánvaló, hogy problémánk minden feltétele és következtetése ilyen transzformációval szemben invariáns. Azt a kollineáris transzformációt alkalmazzuk, amelyiknél D meg-



2. ábra.

felelője a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontja, C, H, G megfelelői az x, y, z -tengelyek végtelen távoli pontjai, B, E_3, E_1 megfelelői pedig a tengelyek egységpontjai (2. ábra). E kollineációval az A, P_4, F pontok az $A'(-1, 0, 0), P'_4(1, 1, 0), F'(-1, 0, 1)$ pontokba kerülnek. m_{13} -nak az x -tengely, m_{01} -nek az $x = -1, y = 0$ egyenes, m_{34} -nek az $x = 1, z = 0$ egyenes felel meg, e'_2 pedig a $(0, 0, 1), (0, 1, 0)$ pontokat köti össze. Minthogy az általánosság csorbitása nélkül ezt az egy-

szzerű esetet tételezhetjük fel, a vesszőket elhagyjuk (3. ábra) és felvesszük e_2 -n át az S_2 síkot, mely az egyeneseinket a rajzon feltüntetett P_1, P_2, P_3 pontokban metszi.



3. ábra.

A $P_3P_4 = t$ értéket paraméterül választjuk. A könnyen megtalálható hasonló, ill. egybevágó háromszögek alapján egyrészt $P_3P_4 : E_3P_4 = OE_3 : OP_2$, azaz $t : 1 = 1 : OP_2$, másrészt $AP_1 = 1 + t$. A szereplő pontok koordinátái tehát

$$P_0(-1, 0, z), P_1(-1, 0, 1+t), P_2\left(\frac{1}{t}, 0, 0\right), P_3(1, 1-t, 0), P_4(1, 1, 0).$$

A többi öt P_i koordinátáit x_i, y_i, z_i -vel jelöljük. Annak feltétele, hogy tíz pontunk másodrendű felületen fekszen, e determináns eltűnése:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & z^2 & 0 & -z & 0 & -1 & 0 & z & 1 \\ 1 & 0 & (1+t)^2 & 0 & -1-t & 0 & -1 & 0 & 1+t & 1 \\ \frac{1}{t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & (1-t)^2 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 1 & 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & z_5x_5 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & z_6x_6 & x_6y_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & y_7z_7 & z_7x_7 & x_7y_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ x_8^2 & y_8^2 & z_8^2 & y_8z_8 & z_8x_8 & x_8y_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & y_9z_9 & z_9x_9 & x_9y_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix}$$

Feladatunk tehát t értékét úgy meghatározni, hogy e determináns zérus legyen. Zérussá válik $\Delta(t)$, ha pontjaink közül kettő összeesik. Ezeket az eseteket, mint érdekteleneket, ki akarjuk küszöbölni. Így $t = z - 1$ esetén P_0 és P_1 , $t = -1$ mellett P_1 és P_2 , $t = 1$ esetben

P_2 és P_3 , végül $t=0$ mellett P_3 és P_4 esik össze. Mivel így $t \neq 0$ feltehető, 3. sorunk elemeit t^2 -tel, továbbá a számolás egyszerűsítése végett a 2. sor elemeit z -vel szorozzuk. Determinánsumknak csak bennünket érdeklő részét írva ki:

$$zt^2\Delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & z^2 & 0 & -z & 0 & -1 & 0 & z & 1 \\ z & 0 & z(1+t)^2 & 0 & -z(1+t) & 0 & -z & 0 & z(1+t) & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & t^2 \\ 1 & (1-t)^2 & 0 & 0 & 0 & 1-t & 1 & 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{vmatrix}$$

E determinánsan a következő átalakításokat végezzük:

- 1) a 4. sorból levonjuk az 5. sort és az új sorból $t-t$ kiemeljük;
- 2) a 3. sorból levonjuk az előbb alkotott 4. és 5. sor összegét és az új sorból $(t-1)$ -et kiemeljük;
- 3) a 2. sorból levonjuk az 1. sor $(t+1)$ -szeresét, ebből kiemeljük $(t+1-z)-t$, az így keletkező

$$-1 \ 0 \ z(t+1) \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1$$

sorból levonjuk az új 3. sor kétszeresét, hozzáadjuk az új 4. és 5. sor összegét, végül kiemeljük $(t+1)$ -et.

E számítások eredménye (t -vel mindkét oldalon osztva):

$$zt\Delta(t) = (t+1)(t-1)(t+1-z) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & z^2 & 0 & -z & 0 & -1 & 0 & z & 1 \\ 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{vmatrix}$$

E determináns láthatólag t -ben másodfokú, következőleg S_2 -nek általában két helyzete vezet a feladat megoldásához. Ezzel kimondott állításunkat bebizonyítottuk.

(Zigány Ferenc)

*

12. Hányoldalú szabályos (sík) sokszögek helyezhetők el az n -dimenziós térben oly módon, hogy valamennyi szögpontjuknak mind az n derékszögű koordinátája egész szám legyen?

A 12. feladat első megoldása.

Ismeretes, hogy a kétdimenziós térben rácsnégyszetek, a három- és többdimenziós terekben pedig még szabályos rácsháromszögek és rácshatszögek is léteznek. Bebizonyítjuk, hogy más szabályos rácssokszög nem létezik, sőt a kétdimenziós térben még szabályos rácsháromszög és rácshatszög sem.

Tegyük fel, hogy az A_1, A_2, \dots, A_m rácspontok egy szabályos rácsm-szög csúcsai. Jelöljük ezt az m -szöget S -sel. Ragadjuk ki az egymásután következő A_{i-1}, A_i, A_{i+1} csúcsokat. Legyen A_i -nek $A_{i-1} A_{i+1}$ felezőpontjára vonatkoztatott tükörképe A'_i , ez szintén rácspont. Az A'_i ($i = 1, 2, \dots, m$) csúcspontok alkotta rácsm-szög szintén szabályos, jelöljük S' -vel. Az $m = 5$ és $m \geq 7$ esetben S' teljesen S belsejében foglal helyet és csúcsaik között összeesők nincsenek. Hasonlóképpen értelmezhető S' -ből S'' , stb. Megállapításainknak következménye, hogy az S, S', S'', \dots rácssokszög-sorozat csúcsainak torlódási pontja van. Ez azonban képtelenség. Tehát szabályos rácssokszög csak három-, négy- és hatszög lehet.

$n = 2$ esetén, azaz síkrácson még három- és hatszög sincs. Ha lenne szabályos rácshatszög, lenne szabályos $A_1 A_2 A_3$ rácsháromszög is. Legyen A_3 -nak $A_1 A_2$ felezőpontjára, ill. A_1 -nek $A_2 A_3$ felezőpontjára vonatkoztatott tükörképe az A_4 , ill. A_5 rácspont. Az A_1 középpont körül negyedfordulattal A_4 az $A_1 A_5$ egyenesre fordítható, jelölje ezt a helyzetet A_6 . Mivel a négyzetrács bármely rácspontja rácspont körüli negyedfordulattal ismét rácspontba kerül, A_6 is rácspont. A_6 -nak $A_2 A_3$ felezőpontjára vonatkozó tükörképe A'_1 szintén rácspont. Hasonlóképpen nyerjük A_2 -ből és A_3 -ból az A'_2 és A'_3 pontot. Az $A'_1 A'_2 A'_3$ szabályos háromszögből továbbkövetkeztetve, mint fent, torlódási ponthoz jutnánk, ami képtelenség.

(Kártieszi Ferenc)

A 12. feladat második megoldása.

Tegyük fel, hogy az n -dimenziós tér k darab rácspontja szabályos k -szöget alkot. Két szomszédos, folytatólágosan irányított oldalnak, mint n -méretű vektornak, koordinátái a_1, a_2, \dots, a_n és b_1, b_2, \dots, b_n egész számok. Az általuk bezárt szög $\frac{2\pi}{k}$, az oldalak egyenlősége miatt $\sum a_j^2 = \sum b_j^2$. Az ismert formula szerint

$$\cos \frac{2\pi}{k} = \sum \frac{a_j}{\sqrt{\sum a_j^2}} \cdot \frac{b_j}{\sqrt{\sum b_j^2}} = \frac{\sum a_j b_j}{\sum a_j^2}$$

vagyis racionális. Legyen $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$, ez primitív k -adik egységgyök. Mivel $\frac{\varepsilon + \varepsilon^{-1}}{2} = \cos \frac{2\pi}{k}$ racionális, ε racionális együtthatós, másodfokú egyenletet elégít ki. Ismeretes azonban, hogy a k -adik primitív egységgyökök $\varphi(k)$ -adfokú, irreducibilis egyenlet gyökei. Tehát csak $\varphi(k) = 1$ vagy $\varphi(k) = 2$ jöhet szóba s így k lehetséges értékei: (2), 4, 3, 6.

Szabályos négyszög már a síkban is van. Szabályos háromszög és hatszög a síkban nincs; ugyanis területük egyrészt $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ ill. $6\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (ahol a^2 , az oldalhossz négyzete, egész szám) s így irracionális, másrészt (háromszögekre bontással és) a háromszög-területet a szögpontok koordinátaival kifejező képlettel számítva racionális volna.

Már a háromdimenziós térben van szabályos háromszög és hatszög is. Háromszöget adnak az (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), hatszöget a (0, -1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, -1), (-1, -1, 0) pontok.

(Sándor Gyula)

IRODALOM.

Béla v. Sz. Nagy : Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Berlin, 1942, IV + 80 oldal. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 5. kötet, 5. füzet.)

A matematika folyó világirodalmáról 1931-től kezdve pergőképet adó Zentralblatt für Mathematik szerkesztősége 1932 óta *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* cím alatt oly sorozatot is kiad, melynek hat-hét íves önálló füzeiteiben az érdeklődés homlokterében álló egy-egy tudományterület bűvára a szóbanforgó kérdéskörrel, irodalmáról s főbb fejlődési irányairól nyújt hangsúlyozottan nem történeti, hanem tárgyi, s a bizonyításokat is sokszor vázoló áttekintést.

Az előttünk fekvő füzet e sorozatban a *huszonötödik* s RADÓ TIBOR-nak PLATEAU problémájáról és a szubharmonikus függvényekről írt két füze után a *harmadik*, mely nemcsak magyar szerzőtől ered, hanem több, ez esetben hat honfitársunknak érdemes, részben a kutatásnak fordulót adó eredményeiről is beszámol.

A füzet az elmélet és alkalmazások körében egyaránt jelentős *főtengelytétel* eddig nyert általánosításait tárgyalja. E tétel kor- és tárgyszerű alakjában a következő ténnyt szögezi le. A *véges* méretű tér egy pontjából kiinduló vektornyalábnak oly összeg- és aránytartó (centroaffin, homogén elsőfokú) A átalakításánál, mely önadjungált, vagyis melynél bármely u, v egységvektorpárra nézve u -nak v képvektorára vetett derékszögű vetülete v -nek u képvektorára vetett derékszögű vetületével megegyezik, a tér méretszámával egyező, páronként egymásra merőleges egységvektor, ú. n. *sajátvektor* bizonyosan csak λ_k ú. n. *sajátérték* mérvű előjeles torzulást szenved. Ha tehát e vektorokat sajátértékeik nem csökkenő sorozata szerint rendezzük és az első, első kettő, első három stb. terére vetett derékszögű vetítés összeg- és aránytartó E_k műveletét bevezetjük, úgyhogy $A_k E_k$ a k -ik sajátvektorra való derékszögű vetítést jelenti, akkor A a sajátvektorokra való derékszögű vetítések sorozatánál nyert alkotók λ_k -mérvű torzításainak összegezéséből építhető fel, amivel $A = \sum \lambda_k E_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_k$ alakú, a sajátértékek sorozata szerinti szinképszerű felbontása áll előttünk.

HILBERT és tanítványai e tételt századunk első évtizedében oly — ma éppen HILBERTTŐL nevezett — *végtelen* méretű térre is kiterjesztették, melyben egy vektor koordinátáinak négyzetösszege összetartó s így az euklideszi mértékrendszer felállítható. Mindenesetre csupán az egység-gömbön *korlátos*, önadjungált, összeg- és aránytartó átalakításokra s azzal az eredménnyel, hogy itt már — sajátvektorok esetleges hiánya mellett — az átalakításnak csak — sokszor folytonos színeképet is felölő — spektrális felbontásáról lehet szó.

A korlátosságra vagy — TOEPLITZ szerint — mindenütt értelmezhetőségre vonatkozó megszorítás súlyossága különösen RIESZ FRIGYES ama tétele kapcsán vált szembeszökővé, mely a LEBESGUE szerint négyzetesen integrálható függvényeket a Hilbert-tér vektoraival kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozta és sokaságuk euklideszi mértékrendszerének megállapítását lehetővé tette. E sokaságban ugyanis pl. már a független változóval való szorzás vagy e szerinti differenciálás általában összeg- és aránytartó, önadjungált egyszerű művelete sem volt mindenütt értelmezhető s így tárgyalható. A quantummechanikának 1926-ban, SCHRÖDINGER által adott fogalmazása azonban a hely- és sebességmeghatározás alapvető kérdése kapcsán éppen e két műveletre támaszkodott.

A fordulat 1929-ben következett be, amikor WINTNER AURÉL előbb félig korlátos, majd E. SCHMIDT egy gondolata kapcsán NEUMANN JÁNOS és ettől függetlenül M. H. STONE a spektrális felbontás lehetőségét bizonyos *korlátlan* átalakításokra is kimutatta.

SZÓKEFALVI NAGY BÉLA 80 oldalas füzetének első négy fejezete a korlátos, önadjungált átalakításokra vonatkozó tételt ismerteti az adjungáltjával felcserélhető általánosabb, ú. n. *normális* átalakításoknak és az ezek külön osztályát alkotó, a NEUMANN által bevezetett absztrakt és komplex Hilbert-térben a forgatások szerepét játszó (tehát megfordításukat adjungáltjaikban találó) ú. n. *uniter* átalakítások spektrális felbontásával bezáróan. Mégpedig az alapfogalmakból kiindulva, teljes logikai felépítésben, átszöve RIESZ FRIGYES több finom, közvetlen megfontolásával és a főtétele bizonyításában az újabb egyszerűsítések egyéni felhasználásával.

Az ötödik és hatodik fejezet a *korlátlan* vagy *félig korlátos* lineáris átalakítások fontosabb osztályait: a szimmetrikus, a normális, az önadjungált, a Cayley-féle s végre a maximális szimmetrikus átalakításokat tárgyalja.

A hetedik és nyolcadik fejezet a normális s ebből következően az önadjungált korlátlan átalakítások spektrális felbonthatóságát igazolja

egyszer NEUMANN JÁNOST követve, másszor RIESZ FRIGYES és E. R. LORCHNAK az önadjungált átalakításokra adott bizonyítását a normálisokra átvive, illetve félig korlátos átalakításoknál K. FRIDRICHSEN még jobban egyszerűsítve.

A kilencedik fejezet a színeképet magát, a háborgáselméletben fellépő határátmenetnél való magatartását s uniter átalakítással szemben invariáns voltát tárgyalja.

A tizedik fejezet a RIESZ FRIGYES által 1913-ban megkezdett operátorszámítást, vagyis egy vagy több önadjungált vagy normális átalakítás függvényeinek vizsgálatát és egyidejű spektrális felbontását ismerteti.

Végre a szerző munkásságához legközelebb eső záró fejezet az uniter átalakítások egyparaméteres csoportjának a quantummechanikában s az ergodikus elméletben oly fontos spektrális felbontását tárgyalja az önadjungált, illetve normális félcsoportokra vonatkozó legújabb általánosítások ismertetésével egyetemben.

A tárgyalás — mint említettük — az alapfogalmakból indul ki, teljes felépítést ad, s bár a legkisebb részletekbe is elmélyed és a várható általánosításokra is figyelemmel van, nagy felkészültséget tanúsító módon az egész kérdéskörrel jól áttekinthető tömör és korszerű képet nyújt. Így NEUMANN JÁNOSNAK 1932-ben megjelent *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* című, az elméletet inkább vázoló s a fizikai alkalmazásokat kidomborító könyve, valamint M. H. STONENAK *Linear Transformations in Hilbert Space* című, ugyancsak 1932 évi terjedelmes, az elmélet egy részét s az analízis körében való alkalmazását tárgyaló monográfiája után a fiatal szegedi kutatónak e pompás beszámolója a matematika szóbanforgó új, szép, mélyenszántó és fontos fejezetének további fejlesztését és közkinccsé válását bizonyosan nagy mértékben segíti majd elő.

Stachó Tibor.

Gombás Pál: Bevezetés az atomfizikai többtest-probléma kvantummechanikai elméletébe. I—VII. és 1—177. oldal. Kolozsvár 1943. — A kolozsvári Ferenc József tudományegyetem *Acta Scientiarum Mathematicarum et Naturalium* sorozatának 14. száma. — Ára 11 P.

Miután a kvantummechanika alapelveinek kialakulása 1928 körül befejeződött, meg volt adva a lehetőség arra, hogy több elektront tartalmazó atomok és egyszerűbb molekulák jellemző sajátosságait és fontosabb fizikai és kémiai állandóit empirikus paraméterek mellőzésével tisztán az atomi alapállandók és az illető atom vagy molekula szerkezete alapján elméletileg numerikusan meghatározzák. Az utolsó másfél

évtizedben ki is alakultak azok a módszerek, melyek a számítások keresztülvitelét komplikáltabb esetekben is lehetővé tették és melyek kedvező esetekben az illető állandók, főképp az atomok alap és gerjesztett állapotai energiaértékeinek, ú. n. termjeinek «spektroszkópi» pontossággal sok tizedesre való elméleti kiszámítását megengedték.

Gombás maga is nagy eredménnyel vett részt ezen kutatásokban és azért igazi örömmel vesszük tudomásul elhatározását, hogy a modern fizikának eme élénk fejlődésben levő fejezetét összefoglalóan ismertesse. Elsősorban olyan olvasókra gondolt, kik a kvantummechanika alapelveit ismerik és egyrészt tájékozódni óhajtanak a felől, hogy az elmélet mai fejlettségi fokán mennyire képes az atomok és molekulák konkrét sajátságairól numerikusan számot adni, másrészt maguk is ilyenmű vizsgálatokba bekapcsolódni óhajtanak.

A könyv tartalmának áttekintése a következő:

Az első fejezetben a hullámmechanika alapfogalmainak rövid összefoglalása után a hidrogén atom elméletét és a perturbáció-elmélet alapjait ismerteti. A második fejezet a többtestprobléma általános hullámmechanikai elméletét nyújtja, itt a «kicsérélődési kölcsönhatás» és a Pauli-féle elv alapvető fogalmait vezeti be. A harmadik fejezet a héliumatom és a hidrogénmolekula elméletét nyújtja, a negyedik a sajátfüggvények és az energia sajátértékei meghatározására szolgáló közelítő módszereket, nevezetesen a variációs módszert vezet be, részletesen a módszer alkalmazását a kételektron probléma esetében. Így a héliumatom és héliumszerű ionók alaptermjeinek meghatározását részletesen tárgyalja Hylle-raas szerint a magasabb közelítések tekintetbevételével is. Kitér a gerjesztett termék meghatározására és a hidrogénmolekula részletesebb elméletére is. Ugyanezen fejezetben tárgyalja a nagy jelentőségre szert tett Hartree és Hartree-Fock-féle módszereket.

Az ötödik fejezet az atom statisztikus elméletének kifejtésére van szánva. Ez az a terület, melyben Gombás sokat dolgozott, szép eredményeket ért el és melyről egy német nyelven megjelenendő monográfiája megjelenés előtt áll. A szabad elektrongáz statisztikai tárgyalása a bevezető rész. Azután a Thomas-Fermi-féle statisztikus atommodellt ismerteti, majd az elmélet további kiépítését: a Lenz-Jensen-féle módszert, a perturbációszámítás alkalmazását az atom statisztikai elméletében, a kvantumállapotok betöltési elvének statisztikai megfogalmazását, tehát Pauli-féle elv tárgyalását a statisztikai elmélet keretében. Itt gyakran hivatkozhatik saját, tanítványai és más magyar fizikusok vizsgálataira. Saját vizsgálatai közül kiemelem a *LiBr* kristály tárgyalását a Jensen-féle módszerrel a polarizáció tekintetbevételével, a diamágneses sus-

ceptibilitás meghatározását, a statisztikai perturbációelmélet kiépítését és a betöltési elv statisztikai megfogalmazását, a Na, K, Ca atom, az Al ion néhány energianívójának meghatározását.

A hatodik fejezet a molekulák és kristályok kötését tárgyalja és igen vázlatos, amit annál inkább sajnálhatunk, mert Gombás ép ezen a területen, nevezetesen a fémek elméletében számos értékes és alapvető vizsgálatot végzett, így a fémek állandóinak meghatározása egyrészt Wigner és Seitz, másrészt Gombás vizsgálatain alapulnak. Ezekről a vizsgálatokról mondják Möglich és Rompe a «Die Physik» c. folyóirat 10. évf. 8. oldalán 1942-ben: «Eine eigenartige, um nicht zu sagen einzigartige Konkurrenz ist den experimentellen Methoden durch theoretische Verfahren zur Berechnung der Energiebänder entstanden, die auf Arbeiten von Wigner und Seitz, sowie von Gombás basieren. Es hat den Anschein, als ob diese theoretische Verfahren beginnen, den experimentellen Methoden hinsichtlich der Ergebnisse ebenbürtig zu sein, so dass es möglich ist, ebenso wie etwa in der klassischen Beugungstheorie, ein beliebiges Problem sowohl experimentell wie auch theoretisch gleichwertig zu bearbeiten». Nyilván külső okok, a könyv terjedelmének megszorítása, okozták e korlátozást.

Mivel a könyv a vizsgálatokba való bekapcsolódás megkönnyítését is célozza, bő irodalmi felsorolást is hoz: 19 oldalon több mint 300 értekezést sorol fel, néhány szóval a tartalomra is utalva. Az összefoglaló művek felsorolásában nem törekszik teljességre, de mégis kíváncsot lett volna olyan részben alapvető, részben igen elterjedt művek felemlítése, mint Pauli cikke a Geiger-Scheel féle Handbuchban, Wigner, Jordan és Condon-Shortley könyvei, valamint Hellmann Quantenchemie-je.

Tárgyalása világos és elég beható, néha szeretttük volna, ha kissé részletesebb lenne.

Mindent összefoglalva, megállapíthatjuk, hogy ez a monográfia a magyar fizikai irodalomnak jelentékeny nyeresége, mely az atomfizika egyik jelentékeny fejezetének ismeretét és a vizsgálatok egy körébe való bekapcsolódást nagymértékben elő fogja mozdítani.

Ortway Rudolf.

Veress Pál: Elemi mennyiségtan magasabb szempontból. (Aritmetika.) VIII+171 oldal, Budapest, 1942, az Országos Középiskolai Tanáregyesület kiadása.¹

A matematika alapelemei sokszor a legnehezebb feladatok elé állítják a tanítót és a kutatót is. A kutatót azért, mert az axiomatikai vizsgálá-

¹ Pedagógiai Szakkönyvek, 8. kötet.

latok során nem vezet a felsőbb matematikában oly gyakran felismerhető analógiák vezérfonala, a tanítót pedig azért, mert igen sokszor épp a leglemibb ismeretek tekintetében ugyanúgy csak megérzéseire támaszkodik, mint tanítványai és így megállapításaiból hiányzik a szilárd alap. Szerző helyesen írja könyve előszavában: «... a tanárjelöltek éppen abból az anyagból, amelyet majdan tanítaniok kell, nem kapnak megfelelő kiképzést.» E könyv célja épp az, hogy ezen a hiányon segítsen s az aritmetika belső szerkezetét és elemi alkatrészeiből való felépítését a középiskolai tanár és tanárjelölt számára megvilágítsa.

Az I. fejezet a természetes számokkal, valamint az összeadás és a szorzás műveletével foglalkozik. Szerző a PEANO-féle axiómákból indul ki, ezeket azonban nem nevezi axiómáknak, hanem alaptételeknek. Ez az elnevezésbeli eltérés azonban nem csak szójáték, hanem egyszerűs mind szerző nem-axiomatikus beállítottságának is kifejezője. Számára ugyanis — ellentétben az axiomatikusokkal — nem minden dolog szám, ami a PEANO-féle axiómákat formálisan kielégíti, hanem a természetes számsor intuitive adott tárgya gondolkodásunknak. A PEANO-féle axiómák tehát a már meglevő számsorra vonatkozó közvetlenül világos alaptételek, amelyekből következnek az összeadás és a szorzás összes tulajdonságai, mint pl. e műveletek monotonitása, vagy asszociatív és kommutatív volta.

A II. fejezet a kivonás kapcsán a negatív számokról szól, valamint egy bevezetést is tartalmaz a számelmélet elemeibe (kongruenciák). Ezeket a később is visszatérő számelméleti részleteket csak a legmeglegebben lehet üdvözölni, mert ezzel egyrészt az alapvizsgára készülő tanárjelölt összegyűjtve kapja meg a számelméletből azt az ízelítőt, melyre épp szüksége van, másrészt az esetleg érdeklődő középiskolai tanár is rátalál a számelmélet elemeiben azokra a középiskolában méltatlanul mellőzött matematikai gondolatokra, melyek segítségével legalább is jobb tanítványaival megismertetheti a formalizmus által el nem takart valódi matematikai gondolkodást. Örömmel olvastuk e fejezetben a geometriai számelmületről szóló részt. A fejezet az egész számok középiskolai tanítását illető értékes pedagógiai megjegyzésekkel zárul.

A III. fejezet a racionális számokkal foglalkozik. Itt tárgyalja szerző a számtani és a mértani sort is, melyekkel kapcsolatban külön megemlítjük azt a geometriai eljárást, amelynek segítségével e sorok összegezése szemléletes geometriai tartalmat nyer. Különösen a végtelen geometriai sor konvergenciája válik ilyen módon szemléletessé. Szerző

a könyvben több helyen is hangsúlyozza annak szükségességét, hogy a geometria és az algebra tanítása során a matematika ne essen szét két részre, hanem a lehetőség szerint olvadjon össze egy egységgé. Ez a fejezet is számelméleti gondolatokkal, nevezetesen a négyzetes maradékokra és pythagorasi számhármásokra vonatkozó elemi tételekkel zárul, s az utóbbiak kapcsán szerző kitér a nagy FERMAT-tételre és megemlíti a WARING- és a GOLDBACH-problémát is.

A IV. és egyben utolsó fejezet az irracionális számokkal foglalkozik. Ezeket szerző a CANTOR-fele módszerrel, vagyis racionális számok konvergens sorozatai segítségével vezeti be, de tárgyalja a DEDEKIND-fele szeletalkotást is. Az irracionális számok tizedes- és lánc törtelőállításai után az irracionális számok középiskolai tanítását illető kényes pedagógiai probléma rövid megbeszélésével ér véget a könyv.

Kétségtelen, hogy a magyar középiskolai matematika-oktatás régen nélkülöz egy olyan vezérfonalat, amely a középiskolai tanár számára megvilágítja azokat az elemeket, amelyeket az átlagos tanár teljes egészében nem szokott végiggondolni, noha évről-évre tanítja őket. Tekintve hogy szerző könyvében ezt az alapjában véve eléggé egyhangú matematikai fejezetet friss előadásával, valamint az anyag ügyes elrendezésével élvezetessé tudta tenni, a könyv pótolja az eddigi hiányt és a középiskolában tanító tanár számára igen hasznos és értékes olvasmányoknak mondható. Érdeklődéssel várjuk a folytatást.

Alexits György.

Mennyiségtani és természettudományi didaktikai lapok; szerkeszti Porcsalmy Zoltán és Veress Pál.

A középiskolai diákságnak szóló matematikai folyóiratok szép multra tekinthetnek vissza hazánkban, inkább mint — talán csak Franciaországot véve ki — más országokban. Hamarosan félszázada lesz annak, hogy ARANY DÁNIEL — akit most is, nyolcvanéves korában, aktív matematikusaink között üdvözölhetünk — 1894-ben megalapította Győrött a *Középiskolai Matematikai Lapokat*, mely igen hamar megtalálta a maga lelkes közönségét. Három év múltán a lap Budapestre költözött, amikor annak szerkesztését — anyagi áldozatoktól sem riadva vissza — RÁTZ LÁSZLÓ, az evangélikus gimnázium kitűnő tanára vette át, akihez 1908-ban mint társszerkesztő ANTAL MÁRK csatlakozott. A lap külalakja megcsinosodott, terjedelme és közönsége megnövekedett. Az első világháború alatt megszűnt lapot 1925-ben elismerésméltó módon FARAGÓ ANDOR új életre keltette *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* címen. E folyóiratok, különösen kitűzött feladataikkal, a beérkezett sikerültebb megoldások közlésével, a megoldók nevének

felsorolásával és (bizonyára sokkal kisebb mértékben) cikkeikkel is, a matematika iránt érdeklődést és tehetséget mutató diákok matematikai fejlődését hatásosan elősegítették. E mellett valóságos tudományos barátságokat és — a szó legnemesebb értelmében vett — vetélkedést hoztak létre olvasóik között, amely vetélkedés azután, az érettségi vizsga letétele után, a mi Társulatunk tanulmányversenyein érte el tetőpontját — és e tetőpont sokaknál tudományos működésük kiindulópontjává vált. Határozott kultúrvesztésnek kell tehát tekintenünk, hogy 1939-ben FARAGÓ ANDOR az akkor megjelent papírkorlátozó kormányrendelet következtében lapjának beszüntetésére kényszerült és a középiskolai diákság csaknem négy éven át matematikai lap nélkül maradt.

A most megindult *Didaktikai Lapok* egyik fele (a «tanulói rész» jelzésű fele), melyet ALEXITS GYÖRGY, HAJÓS GYÖRGY és KÁRTESZI FERENC közreműködésével VERESS PÁL szerkeszt, lesz hivatva az így előállott űrt betölteni. E rész most megjelent első, 1943. márc. 15-i füzeté teljes mértékben jogosulttá teheti a reményt, hogy e lap be fogja tölteni hivatását. Az első cikk, NOVOBÁTZKY KÁROLY tollából, GALILEI halálának 300-ik évfordulója alkalmából, közérthető és plasztikus képet ad «a természettani kutatás módszere megteremtőjének és nagy példaadójának» mechanikai rendszeréről. Ehhez csatlakozik egy a valószínűség-számítás körébe vágó GALILEI-től származó és történetileg is nevezetes felismerés rövid ismertetése. EGERVÁRY JENŐ cikke azonosságoknak egyenlőtlenségek bizonyítására való alkalmazásáról szól. Ezek a — nagyrészt eredeti — alkalmazások, a mellett, hogy a diákok is könnyen megérthetik, minden matematikus érdeklődésére számíthatnak.¹ HAJÓS GYÖRGY dolgozata a geometriai szerkesztésekről arra is hivatva van, hogy a jövődő körnégyszögesítők, szögharmadolók és más álmatematikások annyira kártékony szektáját, ha nem is kiirtsa (mert ez reménytelen), de legalább is megtizedelje. VERESS PÁLnak a középértékekről szóló cikkével kapcsolatban külön felhívjuk a figyelmet e cikk ábrájára, mely a legnevezetesebb középértékek között fennálló egyenlőtlenségeket és egyenlőségeket igen szemléletesen ábrázolja. A kisebb cikkek közül felemlítjük azt, mely a Möbius-féle szalag különböző felmetszéseiről szólva a topologikus térszemléletbe és gondolkodásba — mely az utolsó évtizedekben domináló szerephez jutott a geometria irodalmában — vezeti be ifjú olvasóit.

E füzet továbbá 18 könnyebb és 18 nehezebb kitűzött feladatot tartalmaz, melyeknek egy része e füzet cikkeihez csatlakozik. Ez az

¹ Ebbe a körbe vág a jelen füzetünkben kitűzött 19. számú feladat is.

utóbbi körülmény bizonyára a cikkek gondos áttanulmányozására fogja az érdekelt tanulókat buzdítani. Úgy, mint e lap fentebb említett elődei-nél, most is a feladatrovat fogja leginkább olvasóit önálló gondolkodásra sarkalni. E mellett az ifjú munkatárs, ha talán a felemelő *εὐρύχα*-érzés önmagában nem elégítené ki, sikeres fáradozásának kézzelfoghatóbb jutalmát fogja elnyerni, amikor elmeszüleményét a megoldott feladatok rovatában nevével együtt nyomtatásban fogja viszontlátni.

Az a magas nívó, melyet az új folyóirat tanulói része már első szá-mával oly öröndetes módon felmutatott, kíváncsossá teszi, hogy a lap tanárok és tanulók között egyaránt minél szélesebb körökben el-terjedjen.

König Dénes.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1943. évi május 22-én tartott XLVIII. közgyűlés.

A közgyűlést POGÁNY BÉLA elnök nyitotta meg a következő beszéddel:

Van szerencsém megnyitni idei rendes közgyűlésünket és az annak keretében megtartandó Rados Gusztáv-émlékünnepélyünket. Melegen üdvözlöm kedves vendégeinket, MIHAILICH GYŐZŐ rektor magnifikuszt, aki a Műegyetem képviselőjében és RÉTHLY ANTAL igazgató urat, aki a Meteorológiai Intézet képviselőjében volt szíves itt megjelenni, valamint a RADOS-család itt megjelent tagjait.

Szücs tagtársunk emlékbeszéde méltatni fogja RADOST a matematikust, az alkotó tudóst, tudományos publikációi alapján. Azonban cikkei és tanulmányai RADOS Oeuvre-jének csak egy részét alkotják. E mellett ő élt és cselekedett és ily módon kortársaira és a tudomány, különösen a hazai tudomány fejlődésére igen jelentékeny hatása volt. Nemcsak a katedráról elhangzott tanításaira gondolok, melyekkel a mérnökök tízezreit nevelte, hanem egyénisége varázsának a személyes érintkezésben megnyilvánuló hatására, mely a Műegyetem, a Magyar Tudományos Akadémia és különösen Társulatunk életében mutatkozott, hol kezdettől fogva mint titkár, majd alelnök és mint elnök működött és szerkesztette a Matematikai és Fizikai Lapokat. Társulatunk érdekeit utolsó lehelletéig önzetlenül szolgálta. Nemcsak szervező és reprezentáló egyénisége volt a magyar matematikának, hanem útmutatója és tanácsadója kortársainak, a fiataloknak pedig támogatója, kinek örök hálával tartozunk.

Az elnöki megnyitó után SZÜCS ADOLF tartott előadást «Rados Gusztáv matematikai munkássága» címen, majd ORTVAY RUDOLF ügyvezető titkár az itt következő titkári jelentést olvasta fel:

Társulatunk most befejeződő éve annak a nagy gyásznak jegyében zajlott le, mely a Társulatot kiváló volt elnökének halálával érte. Mai ülésünket teljesen RADOS GUSZTÁV emlékének szenteltük s így e rövid titkári jelentésben mindjárt rátérhetünk Társulatunk egyéb eseményeire. Az utolsó két év két vaskos (36 ill. 20 íves) kötetének kiadásával jólsikerült jubiláris gyűjtésünk eredményének nagy részét elköltöttük és már-már úgy látszott, hogy Társulatunk ismét a szigorú takarékosagra kénytelen visszatérni, ami elsősorban lapunk terjedelmének nagyobb fokú redukálásában fejeződött volna ki. Éppen jókor érkezett tehát az az újabb nagyértékű segítség, melyről a t. közgyűlésnek örömmel kell beszámolnunk. A Magyar Nemzeti Bank 5000, a Ganz-gyár pedig újabb 1000 pengőt adományozott Társulatunknak. Fogadják a nemeslelkű adományozók — kiknek segítségével nemcsak anyagi, hanem erkölcsi támogatást is találunk — e helyütt is Társulatunk hálás köszönetét.

Ezek az adományok valószínűleg lehetővé fogják tenni, hogy Társulatunk még két éven át az 1942-es év kereteivel megegyező mértékben fejthesse ki azt a hivatását, melyet a magyar kultúra szolgálatában immár 52 év óta betölt. Lapunk 50.-ik kötetének első füzeté, több mint 12 ívnyi terjedelemben már sajtó alatt is van és a nyár elején szétküldésre fog kerülni. Munkatársaink lelkes buzgalmának köszönhető, hogy lapunk összeállítása a két év óta beállott nagymérvű terjedelemnövekedés dacára sem okoz nehézséget.

Az idén került első ízben kiosztásra Társulatunk Klug Lipót-jutalma, mely két egyenlő részre elosztva dr. FEJES LÁSZLÓ kolozsvári egyetemi gyakornoknak és dr. ZIGÁNY FERENC műegyetemi magántanárnak ítéltetett oda. Örömmel említjük meg, hogy KLUG LIPÓT, Társulatunk tiszteleti tagja, bár már 90-ik életévébe lépett, teljes szellemi és testi épségben, sőt matematikai alkotóerejének is birtokában érte meg az általa alapított díj első kiosztását.

Társulatunk Tangl Károly-emlékérmé most már valamennyi aláírónak megküldetett. Néhány példány 15 pengős áron még megszerezhető Társulatunk pénztárosánál.

Szép sikerrel zajlottak le tanulmányversenyeink, különösen a matematikai, melyen az első báró Eötvös-jutalmat CSÁSZÁR ÁKOS, a

másodikat pedig PÁL SÁNDOR nyerte el. A fizikai tanulóversenyen pedig SZABLYA JÁNOS, KÓSA PÉTER és HUSZÁR ISTVÁN egy-egy második Károly Irén-jutalmat kapott.

A maít beleszámítva 12 előadóülésünk volt, melyeken 8 matematikai és 5 fizikai előadást halottunk. Három kitűnő külföldi vendégünk is megtisztelt előadásával: F. HUND lipcei professzor, J. SCHINTLMEISTER bécsi docens és ROLF NEVANLINNA helsinki professzor. Mint örvendetes jelenséget meg kell itt említenünk vidéki tagjaink fokozódó szereplését üléseinken. A 4 budapesti és 3 külföldi előadó mellett 6 vidéki tagtársunk tartott idén előadást: FEJES LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, KALMÁR LÁSZLÓ, NAGY L. JÓZSEF, RÉDEI LÁSZLÓ és VARGA OTTÓ. Annál nagyobb hálával kell fogadnunk szíves fáradozásukat, mivel nagyrészüik külön az előadás megtartása céljából utazott fel Budapestre.

Meg kell említenünk, hogy az 1943. év a matematika és fizika történetében nevezetes évforduló: NEWTON születésének 300 éves évfordulója. Amint Társulatunk 1942-ben megünnepelte GALILEI halálának évfordulóját, úgy ezen évben is szándékában volt a gravitáció törvénye felfedezőjének, a klasszikus mechanika alaptörvényei felismerőjének és a differenciál és integrálszámítás egyik felfedezője emlékének méltó keretek közt áldozni. Ez a tervbevett ünnepi Newton-ülés az előadó megbetegedése miatt elmaradt, de reméljük, hogy még e naptári évben meg tudjuk tartani.

Taglétszámunknak az utolsó években megindult fokozottabb növekedése az idén is örvendetes módon folytatódott: 47 új tag lépett be Társulatunkba, úgy hogy az utolsó három év alatt több mint 100 taggal (azaz kb. 50%-kal) gyarapodott Társulatunk.

De sajnos, voltak veszteségeink is. Volt elnökünk halála nem az egyetlen gyász, mely Társulatunkat ebben az évben érte. Elvesztettük Társulatunk nesztorát, a magyar elektrotechnika nagy alakját, ZIPERNOVSZKY KÁROLYT. Ha korszakalkotó működését nem a mi Társulatunk keretében fejtette is ki, illendő hogy mi is igaz kegyelettel megemlékezzünk a magyar kultúra e pótolhatatlan veszteségéről. Elvesztettük továbbá MARCZELL GYÖRGYÖT, a meteorológiai intézet nyugalmazott igazgatóját és megdöbbentően tragikus hirtelenséggel dr. FEKETE JENŐT, az Eötvös Loránd geofizikai intézet igazgatóját, aki régebben buzgó aktív tagja volt

Társulatunknak, továbbá NAGY ISTVÁN marosvásárhelyi áll. gimn. tanárt.

Ha a természet rendjébe való megnyugvás bizonyos fokig enyhítheti az öregek eltávozásakor érzett bánatunkat, ez a vigasztalásunk sincs meg, midőn két fiatal tagtársunknak, BISCHITZ LÁSZLÓnak és dr. GRÜNWARD GÉZÁnak haláláról kell jelentést tennünk. Mindketten honvédelmi munkaszolgálatuk teljesítése közben a keleti fronton áldozták fel életüket. GRÜNWARD GÉZA ülésein tartott szép előadásaival és Lapunkban közölt nagyértékű cikkeivel különösen közel állt hozzánk. A fiatal magyar matematikus-nemzedék e sokat ígérő tagjának elhúnyta a nemzetközi matematikus-világnak is gyászát jelenti. Fájdalmunkat csak az a körülmény enyhíti, hogy önfeláldozó kötelességteljesítésben életüket hazánk és az európai kultúra védelmében áldozták fel.

A háborút természetesen egyebekben is megéreztük. Lapunknak szánt számos dolgozat azért nem tudott elkészülni, mert szerzőik katonai vagy munkaszolgálatra vonultak be s legutóbb Választmányunk két tagja is megkapta katonai behívóját. Meg vagyunk győződve, hogy honvédelmi kötelességük teljesítésében éppúgy meg fogják állani helyüket, mint a tudomány ápolásában és szívből kívánjuk, hogy valamennyiüket hamarosan, teljes egészségben idehaza üdvözölhessük.

JELITAI JÓZSEF pénztárosi jelentéséből a zárszámadást és vagyonmérleget alább közöljük. A közgyűlés megadta a felmentvényt a pénztárosnak.

Majd a lelépő választmányi tagok, BAUER MIHÁLY, BAY ZOLTÁN, KERÉKJÁRTÓ BÉLA, NAGY L. JÓZSEF, PATAI IMRE, SZÁSZ PÁL újból megválasztattak. A számvizsgáló bizottságba pedig (melynek a választmány részéről SZABÓ GÁBOR és STACHÓ TIBOR lettek tagjai) a közgyűlés a maga részéről GOLDZSIHER KÁROLYT, RENNER JÁNOST és BACZONI JENŐT küldte ki.

1942. évi zárszámadás.

Bevétel:

	Pengő
1. Maradvány az 1941. évről	5159-68
2. Tagdíj	1354-31
3. Előfizetési díj	1317-42
4. Magyar Tudományos Akadémia segélye	1000.—
5. Államsegély	500.—
6. Adomány	1238.—
7. Kamat	192-83
8. Hirdetési díj	47-99.
Összesen	10810-23

Kiadás:

	Pengő
1. Nyomda	5778-43
2. Tanulmányverseny	170.—
3. Tud. Társ. és Int. Orsz. Szöv. Díjkezelősége	82-60
4. Írói, tisztviselői és előadói tiszteletdíj	1984-18
5. Kőnig Gyula-érem készítőjének tiszteletdíja	220.—
6. Tangl Károly-émlékérem	75.—
7. Egyéb	327-81
Pénztári maradvány	2172-21
Összesen	10810-23

Vagyon:

	Pengő
1. Értékpapír 29,008 korona névértékben	—
2. Alapítványok zárt postatakarékpénztári betétkönyvben	1402.—
3. Klug Lipót geometriai alapítványa 1942. dec. 31-én ..	5330-37
4. Pénztári maradvány postatakarékpénztári betétkönyvben, csekkszámlán és kézi pénztárban	2172-21
5. Tagdíjhátralék	200.—
6. Nyomtatvány	100.—
7. Tangl Károly-émlékérem eladó példányai	45.—
Összesen	9249-58

Teher:

	Pengő
1. Tartozás Franklin-nyomdának	42.—
2. Egyenleg	9207.58
Összesen	9249.58

Budapest, 1943. április 10.

Dr. *Jelitai József* s. k.
pénztáros.

Megvizsgáltuk és rendben találtuk.

Budapest, 1943. május 13,

DR. GOLDZIHÉR KÁROLY s. k.

DR. RENNER JÁNOS s. k.

DR. STACHÓ TIBOR s. k.

SZABÓ GÁBOR s. k.

Előadások:

1942. okt. 22. F. HUND (Leipzig): Das Wellenbild der Materie.

1942. nov. 12. A tanulóversenyek eredményének kihirdetése. — FEJES LÁSZLÓ: A legsűrűbb gömbelhelyezkedés problémájáról.

1942. nov. 26. KALMÁR LÁSZLÓ: Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára.

1942. dec. 10. GYULAI ZOLTÁN: Néhány előadási segédeszköz és kísérlet a hullámtanhoz. — NAGY L. JÓZSEF: Galilei kísérletei az ütés erejének és energiájának megmérése.

1943. febr. 11. ALEXITS GYÖRGY: Ortogonális polinomsorok konvergenciájáról.

1943. febr. 25. VALATIN JÁNOS: A kétatomos molekula tárgyalása a kétcentrum-modell nélkül.

1943. márc. 18. Jelentés az első Klug Lipót-jutalomról. — VARGA OTTÓ: Az állandó görbületű Riemann-féle terek egyik jellemzési módjáról.

1943. ápr. 8. J. SCHINTLMEISTER (Wien): Über den Bau der Atomkerne.

1943. ápr. 29. RÉDEI LÁSZLÓ: A geometriai sorozat aszimptotikus viselkedéséről mcd. 1.

1943. máj. 13. THEISS EDE: A matematikai közgazdaságtan újabb fejlődési irányai.

1943. máj. 19. ROLF NEVANLINNA (Helsinki): Abel'sche Integrale.

1943. máj. 22. Rados Gusztáv emlékülés. POGÁNY BÉLA: Elnöki megnyitó. — SZŐCS ADOLF: Rados Gusztáv matematikai munkássága.

Választmányi ülések voltak: 1942. nov. 12., 1943. febr. 25. és 1943. május 13.

Új tagok:

Abharovics Abád, áll. gimn. tanár, Ungvár.
Dr. Bajor Olga, gimn. tanár, Budapest.
Dr. Barna Béla, áll. gimn. tanár, Debrecen.
Bayer Jenő, ev. gimn. tanár, Békéscsaba.
Dr. Biborka Ferenc, tanítóképzőintézeti tanár, Esztergom.
Bóka István, gyak. gimn. tanár, Szeged.
Dr. Bujdosó Ernő, ref. gimn. tanár, Szeghalom.
Cser Andor, ref. gimn. tanár, Csurgó.
Erdősi József, áll. gimn. tanár, Kassa.
Fila Jenő, egy. gyakornok, Kolozsvár.
Gánóczy Mihály, áll. gimn. tanár, Érsekújvár.
Gyíres Béla, tanár, Debrecen.
Dr. Haáz István, főv. keresk. kpisk. tanár, Erdliget.
Hernád Ferenc, prem. gimn. tanár, Rozsnyó.
Hollaky Ilona, egy. hallg., Kolozsvár.
Horváth János, egyet. hallg., Szeged.
Kiss László, áll. gimn. tanár, Cegléd.
Dr. Koháry Béla, áll. gimn. tanár, Nagyszalonta.
Komlós Ferenc, gimn. tanár, Nagyvárad.
Kovács Margit, igazgató, Debrecen.
Kristó Erzsébet, egyet. hallg., Szeged.
Kun Kázmér, prem. gimn. tanár, Keszthely.
László Erzsébet, áll. gimn. tanár, Szabadka.
Dr. Makai Endre, tanár, Rákospalota.
Mátéffy Béla, ref. gimn. tanár, Csurgó.
Mitnyán Mihály, áll. gimn. tanár, Székesfehérvár.
Molnár József, egy. gyakornok, Kolozsvár.
Moór Artur, egyet. hallg., Szeged.
Némedy Mária, ref. gimn. tanár, Szatmárnémeti.
Pécsváradai Vladimírné, áll. gimn. tanár, Zenta.
Sárközy Aladár, ref. gimn. tanár, Mezőtúr.
Schmeykál Istvánka, áll. gimn. tanár, Szabadka.
Sipos Márta, gimn. tanár, Debrecen.
Steinhübel Ferenc, áll. gimn. tanár, Huszt.
Szemerey Andor, ref. gimn. tanár, Kecskemét.
Dr. Szénássy Barna, áll. gimn. tanár, Ungvár.
Szepesi Tibor, áll. gimn. tanár, Szilágysomlyó.
Thern László, áll. gimn. tanár, Kassa.



Timári Márton, ref. gimn. tanár, Hajdúböszörmény.
Dr. Toperczer Johanna, Röntgen-intézeti fizikus, Budapest.
Török Tibor, főhadnagy, Nagyvárad.
Tóth Kálmán, kat. gimn. tanár, Miskolc.
Vargha Tamás, okl. középisk. tanár, Pisa (Itália).
Végh Anna, egyet. hallg., Kolozsvár.
Vereckei Sarolta, áll. gimn. tanár, Zenta.
Virág István, áll. gimn. tanár, Kassa.
Zsámboki Lajos, ref. gimn. tanár, Kúnszentmiklós.

Meghaltak :

Bischitz László, tanár, Budapest.
Dr. Fekete Jenő, miniszteri tanácsos, Budapest.
Dr. Grünwald Géza, tanár, Budapest.
Marczell György, ny. meteorológiai intézeti igazgató, Budapest.
Nagy István, áll. gimn. tanár, Marosvásárhely.
Dr. Rados Gusztáv, ny. műegy. tanár, Budapest, tiszteleti tag.
Zipernovszky Károly, ny. műegy. tanár, Budapest.

Kimutatás

az 1942. évi október 1-től 1943. évi március 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1927-re: Jakab Györgyné (4), Kalmár László (6), Oltay Károly (3), Pogány Béla (8), Reuss Endre (3), Skopál István (8), Szabó Miklósné (8).

1928-ra: Cseh Elekné (8), Kalmár László (6), Oltay Károly (8), Pogány Béla (8), Reuss Endre (5), Skopál István (8).

1931-re: Gyulai Zoltán (2), Pogány Béla (8).

1932-re: Bischitz László (6), Pogány Béla (8).

1933-ra: Bischitz László (8), Pogány Béla (8).

1934-re: Bischitz László (8), Pogány Béla (8).

1935-re: Bischitz László (8).

1936-ra: Bischitz László (8).

1940-re: Bischitz László (8), Oltay Károly (6).

1941-re: Biborka Ferenc (6.5), Bischitz László (8), Gergely Jenő (6), Kalmár László (6), Neogrády Sándorné (8), Oltay Károly (8), Varga Ottó (6).

1942-re: Bacsó Vilmos (6), Bán Lajos (6), Biborka Ferenc (6), Boros János (6), Budó Ágoston (6), Bujdosó Ernő (6), Csaplár Konrád (6), Erőd János (6), Faragó Andor (8), Fejes László (4), Fekete Jenő (8), Fraunhoffer Lajos (8), Gergely Jenő (6), Gyires Béla (6), Gyulai Zoltán (2), Hajós Géza (6), Hoffmann Ernő (8), Kalmár László (6), Lóky Béla (6), Nagy Ferenc (8), Oltay Károly (2), Pancratz Edit (6), Radó Simon (5), Schaller Mátyás (6), Sós Ernő (8), Steinhübel Ferenc (6), Szűcs Adolf (8), Tihanyi Miklós (6), Tobisch János (8), Varga Zoltán (6), Vécsean Teofil (6), Vörös Cirill (6), Zigány Ferenc (8).

1943-ra: Abharovics Abád (6), Bajor Olga (8), Balyi Ferenc (6), Barna Béla (6), Barnóthy Jenőné (8), Bayer Jenő (6), Bán Lajos (6), Biborka Ferenc (6), Bóka István (6), Cser Andor (6), Farkas Dénes (6), Fejes László (6), Fejér Lipót (8), gróf Festetics Sándor (6), Goldziher Károly (8), Gombás Pál (6), Gyulai Zoltán (6), Hajós György (8), Halász Ernő (8), Hernád Ferenc (6), Holenda Barnabás (6), Horvay Béla (8), Horváth János (6), Ispánovits Alajos (6), Jelitai József (8), Kilczér Gyula (8), Koháry Béla (6), Kovács Margit (6), Kövessi Ferenc (8), Kuzaila Péter (6), Lóky Béla (6), Makai Endre (6), Mátéffy Béla (6), Moór Artur (6), Ortway Rudolf (8), Pécsváradi Vladimírné (6), Pogány Béla (8), Romsauer Lajos (8), Sárközy Aladár (6), Schaller Mátyás (6), Schmeykál Istvánka (6), Sipos Márta (6), Steinhübel Ferenc (6), Szabó László (6.2), Szántó Fidél (6), Szepesi Tibor (6), Szénásy Barna (6), Szőke Béla (8), Szűcs Adolf (8), Thern László (6), Tobisch János (8), Toperczer Johanna (8), Varga Ottó (6), Vereckei Sarolta (6), Virág István (6), Zigány Ferenc (8), Zsámboki Lajos (6).

1944-re: Bauer Mihály (8), Makai Endre (6).

2. Előfizetés.

Aczél János 1943 (8), Budapesti Ref. Gimn. 1942 (8), Ferenc József Tanítók Háza 1927 (8), Klökner-könyvkeresk., Székesfehérvár 1943 (6), Lévai Áll. Líceum 1943 (6), Miskolci Ref. Gimn. 1928—1930 (18), 1943 (2), Műegyetemi Atomfizikai Intézet 1941—1943 (24), Műegyetemi Könyvtár Sopron 1943 (6), Műegyetemi II. Mat. Tanszék 1943 (8), Pannonhalmi Közp. Főkönyvtár 1943 (6), Polgári Tanárképző Főiskola 1943 (6), Szabadkai Áll. Gimn. 1943 (6), Vitéz-könyvkeresk., Kassa 1937—1942 (36).

3. Adomány, segély.

Nagy L. József (20), M. Tud. Akadémia 1943 I. (500), Ganz és Társa (1000), Gyulai Zoltán (3).

Budapest, 1943. ápr. 4.

Jelitai József.
pénztáros.

Felelős kiadó : Ortway Rudolf.
Franklin-Társulat nyomdája. — vitéz Litvay Ödön.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőknek küldendőek és pedig a matematikai tárgyuak *Kőnig Dénes* műegyetemi c. ny. rkiv. tanár (Budapest, XI., Horthy Miklós-út 28, Lénárt-pensio), a fizikai tárgyuak pedig *Ortvay Rudolf*, egyetemi ny. r. tanár (Budapest, VIII., Múzeum-körút 4. C épület, Egyetemi elméleti fizikai intézet) címére. A benyújtott cikkek lehetőleg géppel irandók, a papírosnak csak egyik oldalára és ezen kb. 5 cm széles margó üresen hagyandó. Az ábrák külön lapon, sokszorosításra alkalmas formában és gondos kivitelben melléklendőek. A képletek olvashatóan és kivétel nélkül kézzel irandók be. A különleges betűk és jelek a szedő számára megjelölendőek, illetőleg megmagyarázandók. Kérjük t. munkatársainkat, hogy kézírataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy kéziratukra, valamint *minden* korrektúrára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható. A különlenyomatokra vonatkozó kívánságok az utolsó (tördelt) korrektúrára feltüntetendők.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Ortvay Rudolf* titkár címére küldendőek.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámlájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, címváltozások *Jelítai József* pénztáros címére (Budapest, II., Bimbó-u. 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des geschäftsführenden Sekretärs *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

Több mint 40 éve gyárt

tudományos műszereket,	repülőgépműszereket.
korszerű műszereket,	laboratoriumi butorzatot,
optikai eszközöket,	vetítőgépeket,
elektromos mérőműszereket,	hangosfilmes gépeket

M A R X É S M A R X

Első Magyar Repülőműszergyár Budapest

Gyártmányait forgalomba hozza:

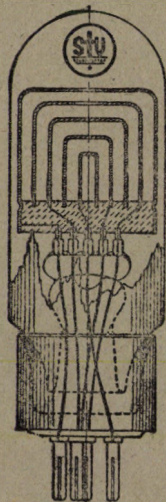
„MARXTON” MARX FERENC

műszaki különlegességek szaküzlete

BUDAPEST, VI., VÁCI-ÚT 18. (a Nyugatinál)

Telefon: 122-110.

A „STABILISATOR”



az egyenirányítót vagy bármilyen más áramforrást
akkumulátorral egyenértékű, állandó feszültségű, kis
belsőellenállású áramforrássá alakítja át.

A «stabilizált» feszültség csak kb. $\pm 0,1\%$ -ot
változik $\pm 10\%$ tápláló feszültség ingadozásánál: kb.
1—2%-ot változik üresjárás és teljes terhelés között;
0,01%-ra függenek csak egymástól a részfeszültségek.

Tehetetlenség nélkül szabályoz. Önfogyasztás: né-
hány mA. A Stabilisator kicsi, könnyű, üzembiztos,
olcsó. Új típusok!

Elméleti és gyakorlati műszaki leírást kívánatra
díjtanul küld a

STABILOVOLT GmbH

Berlin SW 68 Wilhelmstrasse 130

magyarországi képviselője

Dr. GOLDBERGER MIHÁLY

Budapest, VII., Bajza-uca 4. — Telefon: 1-425-09.

50255

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

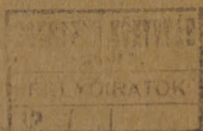
L. KÖTET

1943

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1943

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT



TARTALOMJEGYZÉK.

	Oldal
ZIGÁNY FERENC: Klug Lipót munkássága	205
SZELE TIBOR: Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban	223
WALDAPFEL LÁSZLÓ: A permutációk profiljáról	257
ORTVAY RUDOLF: Newton és korunk tudománya	262
GÁSPÁR REZSŐ: Intenzitáseloszlás az AgH molekula $^1\Sigma-^1\Sigma$ per- turbált sávrendszerében	290
IFJ. SOMOGYI ANTAL: Kicsiny görbületű folyadékfelszínek alakjá- nak vizsgálata	320
Kitűzött feladatok (20—22)	370
Megoldott feladatok (10, 13—16)	371
Irodalom	381
Tanulóversenyek	384
Pénztárosi kimutatás a befolyt összegekről	391

KLUG LIPÓT MUNKÁSSÁGA.¹

Az idők múlásával a dolgok változnak. És nem kivétel ez alól a tudományos kutatás sem, amelynek különböző problémái hol divatba jönnek, hol háttérbe szorulva újaknak adják át helyüket. Míg az elmúlt két évszázad geometerei témáikat legnagyobbreszt a projektív geometria, a másodrendű görbék és felületek köréből vették, a jelenkor érdeklődése ebben az irányban erősen megcsappant. A projektív geometria és abban is a szintetikus módszer ama nagyszerű virágzásának, melyben az elmúlt idők oly sok nagy elméje talált termékeny talajra, rajongója KLUG LIPÓT. Amekkora szeretettel ápolta a szintetikus módszerű projektív geometriát, akkora keserűséggel látta az iránta tanúsított érdeklődés hanyatlását.

Munkásságának gerince két tankönyve : *A projektív geometria elemei* és *Projektív geometria*. Az első síkbeli, a másik térre is kiterjedő ismertetése tárgykörének. Az elsőnek érdekes és a szokásosnál jobban kidolgozott részlete a különböző projektivitások, ill. involúciók és több ilyennek (pl. az adjungáltak) kapcsolata (12. §), valamint a kettős érintésű kúpszeletek (18. §). Mindkét témakör kedvence KLUGnak és több értekezése vonatkozik rájuk. A második munkának szép részlete a hiperboloid c. fejezetében a poláris tetraéderre vonatkozó rész, valamint a harmadrendű térgörbe c. fejezetben e görbének a nullarendszerrel és a görbén átmenő hiper-

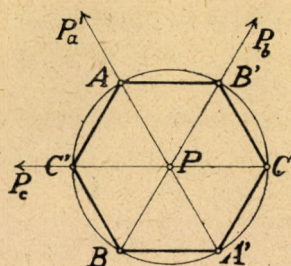
¹ Klug Lipót jutalommal kitüntetett munka (l. e. kötet 86. o.). E jelentés mostani közlésének különleges ünnepi aktualitást ad az a körülmény, hogy KLUG LIPÓT, a kolozsvári egyetem nyug. ny. r. tanára, 1944. jan. 23-án tölti be munkás életének 90-ik esztendejét. Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat, tisztelettel és hálával emlékezve meg KLUG LIPÓT munkásságáról, ebből az alkalomból tiszteleti tagjának őszinte szerencsekívánatait fejezi ki. Szerk.

boloid alkotóseregeivel való kapcsolatai. Harmadik helyen áll *Ábrázoló geometria* c. tankönyve, amely kitűnő pedagógiai érzékkel és az anyag ügyes kiválasztásával írott munka; végül a negyedik: *A harmadrendű térgörbék synthetikai tárgyalása*.

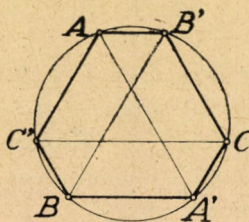
E tankönyveken kívül nagyszámú értekezéssel gazdagította geometriai irodalmunkat. Ezeknek tárgya — a fontosabbakat tekintve — nagyjában három körre vonatkozik: 1. konfigurációk, 2. a másodrendű görbék és felületek poláris elmélete, 3. ábrázolás. Mielőtt néhány kiszemelt dolgozatának ismertetésére térnék, pár szóval jellemezni óhajtom azokat. Tudományos kutatás lényege új igazságok keresése. Az új igazságokhoz gyakran régi, gyakran új utakon jutunk el, következőleg a gondolkodó nemcsak új problémák felfedésén, hanem állandóan új módszerek kitalálásán is fáradozik. Ebből a szempontból nézve a geometriai kutatás lehet általános tételek, általános elvek és módszerek felhasználásával történő vizsgálat, de lehet a kiválasztott probléma sajátos és — legalább egyelőre — csak erre magára vonatkozó fejtegetése. Az előbbi módszer a kutatást megkönnyíti, de sablonossá teszi, a második nehezebb, de tanulságosabb, szebb és a dolgok új megvilágításához vezet. Eredményesség szempontjából egyiket sem lehet a másik elé helyezni. KLUG általában a másodikat követi; munkái sohasem sablonosak. Így például sehol sem látunk nála analitikus tárgyalást. Munkáiban minden feladat külön feladat. Az egyiket így, a másikat úgy oldja meg és nem igyekszik — nyilván így tartván szebbnek — a projektív geometriában megnyilvánuló általános elveket — habár felhasználja azokat — kidomborítani. Egy példán illusztrálva: a *Többféleképp involúciós pontcsoportokról* c. dolgozata igen bonyolult apparátussal (többek között a STEINER-féle quadratikus rokonsággal) szinte meglepő ügyességgel oldja meg a kitűzött problémát. Ha ezzel szemben alkalmazza azon közismert és általánosan használható elvet, miszerint minden kúpszelet centrális kollineációval ∞^2 -féleképpen körbe transzformálható, tüstént rámutatott volna az alábbi esetekre. A szabályos hatszöget alkotó A, B', C, A', B, C' ponthatos (1. ábra) A, B, C és A', B', C' ponthármasa a középpontba eső P és a végtelen távoli P_a, P_b, P_c centrummal négyféle involúcióba sorolható:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & C' & B' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C' & B' & A' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B' & A' & C' \end{pmatrix}.$$

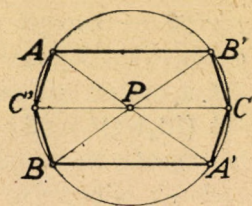
A 2. ábrán látható helyzetben csak a P_a, P_b, P_c centrumú involúciók állanak fenn, végül a 3. ábrán a szóbanforgó involúciók közül csak a P, P_c centrumúak maradtak meg. Hogy ezekből az általános helyzetre hogyan következtetünk, nem szorul magyarázatra. Mindazonáltal hozzátehetjük, hogy KLUG olvasójának nincs oka a kerülő út fáradságait sajnálni, a tanulságos fogások közepette a geometria legkülönbözőbb tételei kerülnek a tárgyalásba. Ezen



1. ábra.



2. ábra.



3. ábra.

előre bocsátott jellemzésünk tehát így foglalható össze: KLUG nem illeszti be problémáit és eredményeit a geometria rendszerébe, problémáinak irodalmát — beleértve saját munkáit is — gyakran elmulasztja megemlíteni; ezzel szemben tudományának kiváló ismerete, mély háttérre valló biztossága, egészen ritka leleményszerűsége és végül munkásságának terjedelme maradandó értéket jelentenek azok számára, akik szeretnek és akarnak tanulni.

Az imént bemutatott involúciók egyszersmind a többféle perspektív háromszögek megértését is szolgálják és ezen előzmény mindjárt felhasználható KLUG egy másik igen érdekes értekezésének bemutatására, amelynek címe: *A Desargues-féle konfiguráció kibővítése*. Az ismert $(10_3 10_3)$ konfigurációt a következő módon bővíti: 1. A konfiguráció pontjait négyszögekbe rendezi és megszerkeszti azok átlós háromszögeit; 2. megszerkeszti az egyenesek harmonikus polárisait ama két-két háromszögre nézve, amelyekre nézve a felvett egyenes a perspektivitás tengelye; 3. újabb har-

monikus pontokat a centrális kollineációban álló háromszögek pontjaira, centrumaira és tengelyeire nézve; 4. mindezek duálisát. Az első lépéssel már 45 perspektív háromszögpárhoz jutunk. E háromszögek 15 pontját először 15 párba, azután 10 ponthatosba rendezi és kimutatja, hogy hatosával kúpszeleten fekvő pontok 10 kúpszeletet állapítanak meg, majd újabb 10-et a duálisan alkotott és rendezett egyenesek (mint érintők). Végül még megmutatja, hogy mindezek a pontok és egyenesek egy — már az eredeti $(10_3 10_3)$ DESARGUES-konfigurációban kifejezésre jutó — polárvonatokozásban egymásnak megfelelői, ugyanígy a két tizes kúpszeletrendszer is. Ezekután a két kúpszeletrendszert ismét egy $(10_3 15_2)^2$, majd a nem homológ háromszögoldalak metszéspontjaiból hasonlóan alkotott kúpszeletrendszert egy másik $(10_3 15_2)^2$ jelzésű — kúpszeletekből és pont-, ill. egyenespárokból álló — quadratikus konfigurációba illeszti. A 2. alatt említett szerkesztéssel megint hatosával 10 kúpszeleten fekvő pontokhoz és újabb két $(10_3 10_3)^2$ konfigurációhoz jut. Kimutatja, hogy az említett — háromszögekre vonatkozó — pólusok és polárisok a nyert kúpszeletek néhányára nézve szintén azok. A most már rendkívül nagy számban keletkező háromszögek, ill. azok párpai és a kúpszeleteken fekvő ponthatosok négyszeresen, háromszorosan (vagy egyáltalán nem) perspektívák, ill. involúciósak. Az elmondottakon kívül még egész sorát látjuk a kúpszeletek, háromszögek stb. kapcsolatainak. Kápráztató ügyességek, meglepő egyszerűsítések, jól alkalmazott, rendszeres jelölések teszik érdekessé ezen olvasmányt, de egy hiányzik belőlük: kapcsolat más problémákkal.

Ugyanezekkel a perspektív háromszögekkel nyert, kúpszeleten fekvő ponthatosok szerepelnek *Két konfigurációról* c. értekezésében, amely csekély, hét oldalnyi terjedelme mellett — többek között — ezt a meglepő eredményt mutatja ki: Szemeljük ki egy pentaéder egyik lapját és e lapon azt a négy egyenest, e_i -t, amelyben azt a többi négy sík metszi. Szerkesszünk az e_i egyenesek mindegyikén át oly két síkot, amely a kiszemelt lapot harmonikusan választja el attól, amely ugyanezen az e_i -n átmegy. (Nyilvánvaló, hogy mindegyik síkpárra végtelen sok eset lehetséges.) A nyert síkok újabb metszésvonalai oly síkokban fekszenek, amelyek ugyanúgy, mint az általunk szerkesztettek, párosával

harmonikusak a pentaéder még megmaradó oldalpárjaival. Az így előállított 10 síkpár 20 síkja oly **K** konfigurációt alkot, amelynek

1. síkjai hármásával 40 egyenesen, hatosával 40 ponton mennek át, minden síkban 6 egyenes, 12 pont fekszik, minden egyenesen 4 pont van és minden ponton négy egyenes megy át;

2. a 20 sík 40 perspektív tetraéderpár lapjai;

3. az egy síkban fekvő 12 pont hatosával 4 kúpszeleten fekszik; a tíz síkban 80 kúpszelet van 6—6 ponttal;

4. a 40 metszéspont tizenkettesével 80 másodrendű felületen fekszik; e felületek mindegyikén 4 kúpszelet van és ezek mindegyikén szintén 4 másodrendű felület megy át;

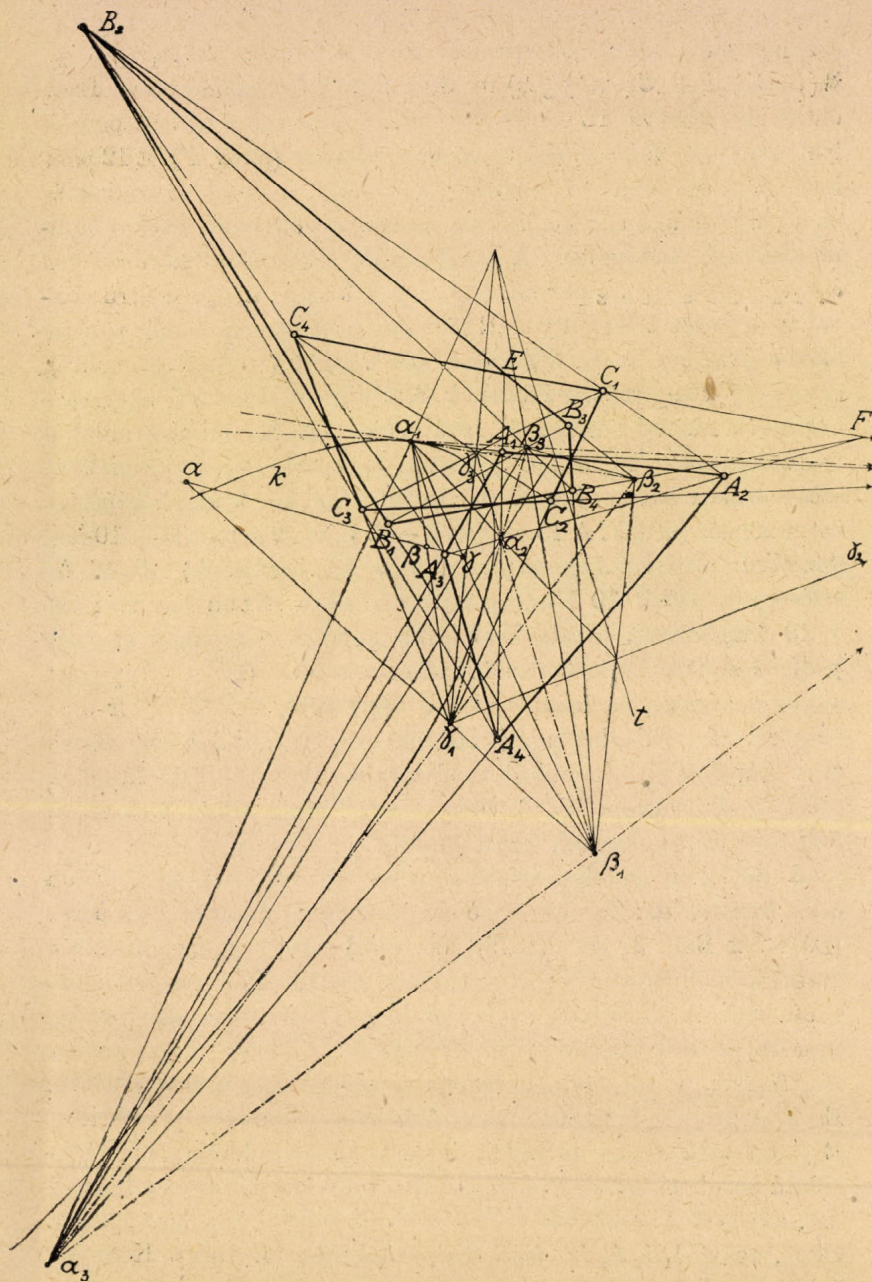
5. a 40 pont mindegyikén 12 kúpszelet és 24 másodrendű felület megy át. Tekintettel arra, hogy egy adott pentaédertől kiindulva ∞^4 ily konfiguráció alkotható, e tétel sokkal használhatóbbnak és más problémákkal összekapcsolhatóbbnak látszik, mint az előbbi.

Nem tisztán, de még erősen konfigurációs színezetű *Staudt vizsgálatai a Pascal-hatszögről és néhány idetartozó megjegyzés* c. dolgozata. Ebben KLUG a Crelle Journal 62. kötetében található, STAUDT-tól eredő, Über die Steiner'schen Gegenpunkte etc. c. értekezés eredményeivel foglalkozik, s ezeknek bővebb, részben új bizonyítását adja. KLUGnak érdeme az, hogy STAUDT rendkívül szövevényes értekezését új oldalról világítja meg. Hogy e probléma ritka bonyolultságáról és az eredmények szokatlan terjedelméről képet nyerjünk, röviden ismertetem. Egy k kúpszelet 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontja többféle Pascal-hatszöget állapít meg. Ezek közül azok, amelyekben az 1, 3, 5 pont rögzített, 6 Pascal-egyenest adnak, amelyek hármásával két STEINER-féle ellenponton mennek át. Ha e 3—3 egyenesnek egymásközti harmonikusáival 6—6 egyenessé egészítjük ki az ellenpontokból kisugárzó sugárrendszereket és az előbbi és utóbbi egyenesek 9—9, tehát összesen 18 metszéspontját vesszük, akkor 6×3 pont és a két ellenpont újabb 6 k_i kúpszeletet határoz meg. Ezek az új k_i kúpszeletek az eredeti k kúpszelet 1, ..., 6 pontjából egyet-egyet tartalmaznak, s e pontok a hat k_i kúpszelet között projektív vonatkozást létesítenek, amelynek módját lejjebb részletezzük. Visszatérve k_i és k metszéspontjaira, ezek közül egyik i , a másik egy szintén valós i' és még két konjugált, képzetes pont, amilyen összesen két pár van, amennyiben e pontok-

ban 3—3 kúpszelet metszi egymást. A k_1, \dots, k_6 kúpszeletek mindegyikén egy-egy involúció van, melyeknek centrumai hármassával egymás involúció-tengelyén fekszenek. Az említett i' metszéspontok k -n az $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ ponthatost alkotják, amelyre nézve újra megismételjük az elmondottakat. Az így nyert 12 involúció-centrum, a Pascal-egyenesek metszéspontjaival együtt oly 45 egyeneshez vezet, amelyeken az említett kétfajta pontok harmonikusan választják el egymást és az i, i' pontok is (egy részükön) rajta vannak. Ezenfelül e 12, k -n fekvő pontban k érintői megint az involúció-centrumokon mennek át. És mindezek után a konfiguráció elemeit (részben) 20-szal megszorozzuk azáltal, hogy a fixnak választott 1, 3, 5 háromszöget, az 1, ... 6 pontokból másképp választjuk ki. Az előbbi k_i kúpszeletek száma is megnövekszik, de még újabb k_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6$) jelzésű kúpszeletek lépnek fel, amelyeknek száma 15. Ezekről kimutatja egyrészt, hogy köztük oszkulálók, centrál-kollineárisak (és egyebek) vannak; másrészt ezek párjainak 45 közös húrja átlója azoknak a Brianchon-hatoldalaknak, amelyek k körül írhatók az 1, ... 6 pontok érintőivel (ismét variálva) és 15 polárisnégyszöget alkotnak k -ra nézve. A polárisnégyszögek 60 szögpontja az előzők Brianchon-pontjai, végül azok átlós háromszögei az eredeti hat pontot tartalmazzák.

Még azt is vizsgálja, hogyan lehet e konfigurációt az első hat Pascal-egyenesből megszerkeszteni, továbbá, hogy fixen tartott k_1, \dots, k_6 kúpszeletek, de rajtuk változó 1, ... 6 pontok mellett hogyan változik maga k . Itt lép fel az a hat projektív vonatkozás, a k_i -k között, amelyet fentebb említettünk. Magában is érdekes körülmény, hogy hat kúpszeleten megadhatók oly projektivitások, amelyek 6 homológ pontja egy kúpszeleten fekszik. Ebből a rövid vázlatból még jónéhány eredmény kimaradt, amelyek csak jóval részletesebb leírással lennének megmagyarázhatók. STAUDT említett dolgozata csekély figyelmet kapott a géométerek részéről, ami komplikált voltának tulajdonítható és valóban bátorságnak kell mondani KLUG lépését, hogy neki mert menni e problémának.

KLUG legszebb konfigurációs dolgozatai közé tartozik a *Desmikus négyszögek* c. Három négyszögről akkor mondjuk, hogy dez-mikus helyzetű, ill. dez-mikus négyszöghármast alkot, ha bármelyik kettő négyféleképp perspektív egymással a harmadik négyszög

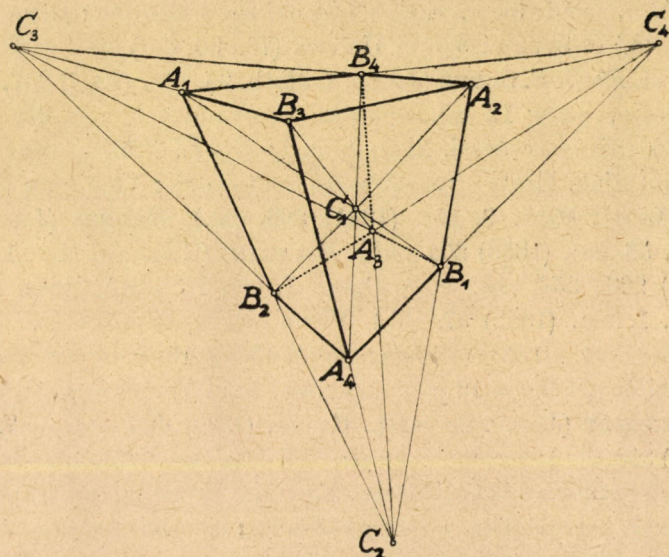


1. ábra.

szögpontjaira, mint centrumokra. A 4. ábrán $\mathbf{A}(A_1A_2A_3A_4)$, $\mathbf{B}(B_1B_2B_3B_4)$, $\mathbf{C}(C_1C_2C_3C_4)$ ily dezmiikus négyszöghármas. Ezek oldalai hármasával 12 pontban metszik egymást és e metszéspontok harmonikusan választják el a szögpontpárokat (pl. E, F). E 12 pont ismét egy dezmiikus négyszöghármasat alkot, s mivel az eredeti és az új dezmiikus négyszöghármas viszonya kölcsönös, azokat konjugáltaknak nevezzük. A négyszögek diagonális háromszögei $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ páronként perspektívák az α, β, γ centrumokkal és a közös t tengellyel. E háromszögek nem homológ pontjai hármasával hat, ú. n. átlósegyenesen vannak (eredményvonalak), s ezek egy k kúpszeletet érintenek. A konjugált, dezmiikus négyszöghármasok oldalai közösek és azok száma 18. Ha minden oldalon meghatározzuk azt a két képzetes pontpárt, amelyek mindkét szögpontpárt harmonikusan választják el, akkor 9 újabb képzetes négyszöghöz jutunk. A 15 négyszög — 6 valós, 9 képzetes — 10-féle dezmiikus négyszöghármaspárt (konjugált hármasok) alkot. Az átlósegyenesekből 10 háromszögpárt alkotva, KLUG bevezeti azt a 10 kúpszeletet, amelyeknek ezek polárisháromszögei és ezek pedig dezmiikus kúpszeletrendszereket alkotnak. (Három kúpszelet akkor dezmiikus, ha bármely kettő négy közös érintővel bír és a négy érintő nyolc érintőpontja két egyenesen fekszik.) A négyszögek és a kúpszeletek elmondott rendszereire nézve az összefüggések egész sorát mutatja ki. A cikk elejétől végig elmés fogásokkal fedi fel a legmegkapóbb kapcsolatokat.

A dezmiikus konfigurációknak kiterjedt irodalma van. KLUG csak STEPHANOS: Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres (Darboux Bull. 3. köt. (1879) 426. old.) cikkét említi. Mielőtt e kérdés irodalmára térnék, egy egyszerű megvilágítást óhajtok előre bocsátani. A dezmiikus tetraéderek meghatározása szóról-szóra egyezik a négyszögekre mondottakkal: bármely két tetraéder négyféleképp perspektív a harmadik tetraéder négy csúcsára nézve. Ezek szerint a dezmiikus négyszöghármas amannak projekciója. Egy egyszerű esete a dezmiikus tetraédereknek a derékszögű, négyoldalú hasáb váltakozó pontjaiból álló két tetraéder és az a harmadik, amelyet a hasábélek végtelen távoli pontjai és a középpontja alkot, azaz $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$ (5. ábra). Könnyen belátható, hogy minden dezmiikus négyszöghármas egy ilyennek

centrális projekciója, s ezzel egyszerű és szemléletes módot nyertünk dezmiikus négyszögek szerkesztésére. Az a szerkesztés, amelyet KLUG a dezmiikus négyszöghármas számára nyújt, planimetriai ugyan, de már az első lépésnél nehézkes (a 12 harmonikus és kölcsönösen perspektív E, F pontokkal) és főként arra nem alkalmas, hogy a négyszögek előre kívánt módon vétessenek fel. Ebből a kiindulásból könnyen eljutunk az elsőfajú negyedrendű térgörbékkel való összefüggéshez. A nyolc A_i, B_i pont, mint a hasáb szög-



5. ábra.

pontjai éppen asszociált pontok lévén, negyedrendű térgörbét nem határoznak meg, de ha egy ilyet rajtuk keresztül felvesszünk, akkor ennek — vagy ami ugyanaz — e görbén átmenő, másodrendű felületsornak C tetraéder poláristetraédere. A felületsorban négy kúp szerepel, ezek csúcsai a C_i pontok. Tehát a C tetraéderrel dezmiikus helyzetű A és B tetraéder csúcsai egy oly negyedrendű térgörbén vannak, amelynek az első poláristetraédere.

Az irodalomban a következő idevágó vizsgálatokat találjuk: STEINER (Werke 2. köt. 654. old.) a következő tételt mondja ki: Ha az F^3 harmadrendű felületnek egy másodrendű felülettel

való áthatása 3 kúpszelet, akkor a kúpszeletek síkjai F^3 -at egy π síkban fekvő g_1, g_2, g_3 egyenesben metszik. És fordítva, ha g_1, g_2, g_3 egyenes F^3 -nak egy π síkkal való metszése, akkor ezeken átmenő, tetszőleges a_1, a_2, a_3 sík F^3 -at még oly $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ kúpszeletben metszi, amelyek egy másodrendű felületen vannak.

STEINER e tételéhez a következőket fűzzük hozzá: Mivel az a_1, a_2, a_3 sík tetszőleges, a π síkból ∞^3 másodrendű felület származtatható, ezek közül ∞^3 kúp és ezek csúcsai egy negyedrendű F^4 felületen vannak, amely az említett másodrendű felületsokaságnak ú. n. magfelülete. Ennek bizonyítása CREMONA: Grundzüge (196. old.) és STURM: Synth. Unters. (76., 80. old.) alatt található. Erről az F^4 -ról F. SCHUR (Journ. f. Math. 95. köt. (1883) 207. old.) kimutatja, hogy 12 csomópontja van, amelyek egy dezmiikus tetraéderhármast csúcsai. Az ilyen negyedrendű felületet dezmiikusnak mondjuk. Ezekre vonatkozóan említendő: VERONESE (Rom. Acc. Lincei Mem. 9. köt. (1881) 306. old.), HERMES (Journ. f. Math. 56. köt. (1858) 204. old.), BELTRAMI (Giorn. di Mat. 1. köt. (1863) 208., 354. old., vagy Opere I. köt. 76. old.), REYE (Acta Math. 1. köt. (1882) 97. old.). Végül még megemlítjük, hogy F^3 27 egyenesének 135 metszéspontjából 45-féle 12-es csoport választható ki úgy, hogy a 12 pont dezmiikus tetraéderhármast alkosson.

HUMBERT (Journ. de math. 6. köt. (1890) 423. old. és 7. köt. (1891) 353. old.) szerint a negyedrendű dezmiikus felület síkmetszése negyedrendű dezmiikus síkgörbe. Ez pedig kapcsolatban áll problémánkkal, helyesebben annak duálisával; ugyanis függetlenül térbeli vonatkozásoktól, a negyedrendű síkgörbe akkor dezmiikus, ha tagja egy olyan negyedrendű görbesornak, amelynek van három négyszögű elfajuló tagja. E három négyszög pedig dezmiikus, vagyis — duálisan a négyszögekhez — bármelyik kettő négyféleképp axiális helyzetű a harmadik négyszög oldalaiival, mint tengelyekkel. Ezek az egyenesek egyetlenegy harmadosztályú görbét érintenek; egy négyszög oldalainak érintési pontjai egy egyenesre esnek és a három ily egyenes egy ponton megy át. Annak feltétele, hogy a negyedrendű görbe dezmiikus legyen, még az is lehet, hogy legyen 3 duplaérintője, amelyek diagonális háromszögét alkotják annak a négyszögnek, amelynek szögpontjai a hat érintési pont. Ilyen négyszög összesen hat van.

Végül ha STURM: Das Problem der Projectivität etc. (Math. Ann. 1. köt. (1869) 533. old.) cikkét tekintjük, a dezmiqus tetraédek és a másodrendű felületsor magfelülete révén a nyolc asszociált pont elméletével találkozunk.

Egy másik dolgozat, amelyben dezmiqus tetraédekekről van szó: *Adalékok a poláris tér struktúrájának ismeretéhez*. E dolgozat tárgya szempontjából két részre oszlik: egyik a konjugált kúpszeletek, ill. másodrendű felületek tárgyalása, abban a megvilágításban, midőn az képzetes görbe, ill. felület valós reprezentánsa, a másik rész poláristetraéderből származtatott dezmiqus tetraéderrendszerrel foglalkozik. E második részben ismét bonyolult konfigurációhoz jutunk, oly felületekkel, amelyek torznégyszögben metszik egymást. Ezek pedig axiális kollineációban konjugáltak (nem mindig); ezekre lejjebb visszatérünk.

Konjugált kúpszeletek megjelölés az irodalomban nem egyértelmű. Két tény keveredik össze ezen elnevezés alatt, frónként különbözően:

a) Két kúpszelet abban a helyzetben, midőn az egyiknek egy (következőleg ∞^2) polárisháromszöge a másikba be van írva.

b) Két olyan kúpszelet, amely közül az egyik polárvonatkozása a másik pólus-polárisát ismét annak poláris-pólusába transzformálja.

A konjugált elnevezés általánosabban az a)-esetre vonatkozik (Enzykl. Math.), de pl. FIEDLER harmonikus helyzetűnek, REYER támasztónak (stützt), vagy apolárisnak mondja. Találkozunk (finomabb megkülönböztetéssel) harmonikusan körülírt, ill. beírt elnevezéssel is. KLUG a b)-esetre használja a szóbanforgó jelzöt, míg STURM harmonikusan hozzárendeltnek nevezi.

Ezen utóbbi, b)-esetű kúpszeletek i karakterisztikájú centrális kollineációval keletkeznek egymásból (WIENER: Darst. Geom.). Másodrendű felületeknél e képzetes kollineáció kétféle lehet: centrális-planáris vagy biaxiális. STURM (Geom. Verw. 3. köt. 21. old.) állítja szépen szembe egymással e kétféle konjunkciót. A továbbiakban konjugáltaknak, mint KLUG, a b)-esetűt nevezzük, az a)-esetre pedig az apoláris jelzöt használjuk.

Visszatérve dolgozatunk ismertetéséhez, az említett második részben ily konjugált felületekről van szó. KLUG az ezek között

fennálló kollineáris kapcsolatot (az i karakterisztikával) nem említi, sem ama kétféle esetet, pedig miután a kollineáció e két faja fontos és széleskörű kutató módszere tárgyunknak, talán jó lett volna erre rámutatni. Dezmikus tetraéderek fordulnak elő a *Néhány tétel a vonalseregekről* c. dolgozatban is.

Kúpszeletekre és másodrendű felületekre vonatkozó néhány tétel általánosítása c. cikkben a DE LA HIRE- és FAURE-körök, ill. a MONGE- és FAURE-gömbök tételeit általánosítja. A főbb eredmények (csak a térbelieket említjük) a következők:

1. Ha egy F másodrendű felület poláristetraéderei köré oly H másodrendű felületeket írunk, amelyek adott π síkban adott polárvonatkozást létesítenek, továbbá π -nek F -re vonatkozó pólusából, P -ből H -ákhoz körülírt kúpok érintési kúpszeleteit előállítjuk, akkor e kúpszeletek egy L másodrendű felületen vannak. L a π síkot a benne megadott polárvonatkozás vezérkúpszeletében metszi és π pólusa L -re nézve újra a P pont.

2. Az előbbi tétel elemeire nézve még fennáll az, hogy a π -ben adott polaritás egy polárisháromszögének oldalaiból F -hez húzott 3×2 érintőssík oly körülírt hatlapot alkot, amelynek csúcsai az L felületen vannak.

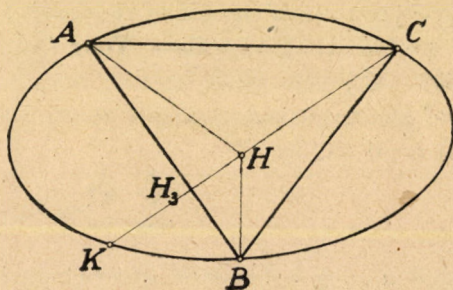
3. Az előbbi tételek duálisai.

Ezek a tételek, ha π a végtelen távoli sík és a benne adott polaritás vezérkúpszelete a végtelen távoli, képzetes gömbi kör (tehát H és L gömb), MONGE és FAURE tételéhez vezetnek. Ha pedig P az F felületnek pontja (kis változtatással), FRÉGIER tételére speciálizálható. A FRÉGIER-tétel egyik általánosítása (130. old. jobb-oldali tétel második fele) már HESSENél előfordul (Crelle Journ. 18. köt. (1838) 110. old.). Ezeken kívül még számos speciálizálást mutat be, amelyek külön-külön is megkapóan érdekesek.

A kúpszelet, mint geometriai hely c. dolgozatban a fókuszokra, ill. a fókusz- és vezérvonalra vonatkozó, ismert tételeket sokféle érdekes változatban általánosítja. Legérdekesebb része e dolgozatnak az utolsó fejezete, amely egyenesektől való távolságokra vonatkozik. Kimutatja, hogy azok az egyenesek, amelyekről a kúpszelet pontjai adott viszonyban álló távolságokban vannak, egy polárisháromszög csúcsain mennek át és bizonyos ortogonális kúpok alkotói.

Négy hasonló tárgyú dolgozata, amely az eszközök gondos előkészítése után sok leleményességgel oldja meg mind a kitűzött problémát, mind annak indirekt vagy másképp módosított változatát: *Kúpszeletbe írt háromszögek közös magasságponttal, Kúpszelet köré írt háromszögek közös magasságponttal, Másodrendű felületbe írt tetraéderek közös magasságponttal, végül Másodrendű felület köré írt tetraéderek közös magasságponttal.* Az utolsó kettőben természetesen ú. n. ortocentrikus tetraédereket kell gondolni, amelyeknek magasságvonalai egy pontban találkoznak. Hogy egyrészt KLUG által követett eljárásról, másrészt e probléma projektív geometriai háttéréről, végül az analitikus megoldás lehetőségeiről képet nyerjünk, be kell mutatnom KLUG kiindulását, pl. az első dolgozat esetében (a másodiké hasonló).

Megállapítja azt az arányt, amelyben HC magasság (6. ábra) talppontja, H_3 a HK távolságot osztja. Ezután fix AB , mozgó C mellett meghatározza H helyét egy k -hoz hasonló h kúpszeletben. Különböző eseteket, majd más geometriai helyeket tárgyal, miközben szó van arról is, hogy a háromszög oly kör poláris háromszöge, amelynek H középpontja. Projektív geometriai nézőpontból ez a tény alkothatja a kiindulást, amennyiben oly apoláris kapcsolatról van szó, amelyben az egyik kúpszelet k , a másik kör. Analitikus eljárásnál tehát az ismert



6. ábra.

$$\theta = a_{11}B_{11} + 2a_{12}B_{12} + a_{22}B_{22} + 2a_{13}B_{13} + 2a_{23}B_{23} + a_{33}B_{33} = 0$$

relációból indulhatunk ki, ahol a -k a k egyenletének együtthatói, B -k pedig a kör egyenletének együtthatóiból alkotott determináns aldeteminánsai. A vonalkoordinátákra vonatkozó hasonló kapcsolat (vagy ami ugyanaz: szerepcsere) pedig a második cikk problémájának felel meg. Ugyanilyen apoláris gömbök szerepelnek a másik két dolgozat problémáinál.

Hosszadalmas volna e dolgozatok eredményeit és érdekességeit felsorolni, csupán szépségük megvilágítása végett megemlítem, hogy pl. képzetes elemek eseteire is kitér és bemutatom az eredmények e megkapó részletét: Mindazon ortocentrikus tetraéderek, amelyeknek H közös magasságpontjuk és csúcsaik az F másodrendű felületen vannak, poláristetraéderei egy G gömbnek, amelynek H középpontja. A tetraéder oldallapjai azt az F' másodrendű felületet érintik, amely polárisfelülete F -nek G -re nézve. Ha H az F -en van, akkor F' két ponttá fajul: H -ra és F -re, a H -hoz tartozó Frégier-pontra. A Frégier-pontok mértani helye \emptyset másodrendű felület, amely F -fel koaxiális. Könnyű felfedezni a kapcsolatot a fentebb bemutatott *Kúpszeletekre és másodrendű felületekre vonatkozó néhány tétel általánosítása* c. értekezéssel. A szerző itt sem tesz utalásokat.

Említést érdemel még *Éleivel gömböt érintő tetraéder* c. dolgozat,¹ amelyben ismét dezmiikus tetraéderek szerepelnek. Érdekes lehet e problémának vizsgálata VOGT (Ann. éc. norm. 12. köt. (1895) 363. old.) ama tétele szerint, hogy az egyik másodrendű felület ∞^2 poláristetraédere éleivel érinti a másik másodrendű felületet és fordítva, ha

$$\sum_k^6 \sum_l^6 a_{kl} \beta_{kl} = 0,$$

ahol a_{kl} , β_{kl} a felületek determinánsainak komplementer másodrendű addeterminánsait jelentik. Esetünkben az egyik felület gömb. Az érdekesség a formula megfordíthatóságában keresendő. Mint KLUG említi, REYE is foglalkozott hasonló problémával.

Befejezésül *A másodrendű felületek ortocentrikus poláristetraéderei* c. értekezést említjük. Ebben kitűnik, hogy ha a tetraéder magasságpontja fix, akkor a tetraéder csúcsai egyenoldalú, harmadrendű (térbeli) hiperbolán vannak, oldallapjai egyenoldalú, harmadrendű parabolának símulásíkjai. Mivel az ortocentrikus tetraéder gömb poláristetraédere és két másodrendű felület közös poláristetraédere a kettő felületsorának (elsőfajú, negyedrendű térgörbének) poláristetraédere, a probléma a projektivitás problémájával rokon. Ez a

¹ Ilyen c. dolgozata kettő van: egyik 1927-ből, másik 1942-ből. Itt az elsőről van szó.

geometria legszebb és legfontosabb feladatainak egyike, szoros kapcsolatban a — szintén igen fontos — nyolc asszociált pont problémájával. E kérdésnek bő irodalma van; talán legjobban idevág STURMnak már fentebb említett (*Das Problem der Projectivität etc.*) értekezésén kívül, *Das Problem der räumlichen Projectivität* (Math. Ann. 6. köt. (1873) 513 old.) c. értekezése.

Több dolgozatot nem óhajtok ismertetni, csupán megemlítem, hogy az ábrázolás körébe vág *A központi vetülettan elemei* c. munkája, továbbá a *Konstruktion des Reliefs einer Fläche zweiter Ordnung*, amelyik pedig PAPPERITZ szerint érdemel említést (Enzykl. Math. III. 1. 581. old.).

Az elmondottak alapján látjuk KLUG munkásságáról, hogy a problémák hatalmas tömegével, sokszor a legnehezebbekkel birkózott leleményes, mindig szellemes és ritka ügyességet eláruló technikával. Munkái érdekesek; és ha a klasszikus projektív geometria iránti szeretetet lehet még felkelteni, akkor KLUG LIPÓT munkái e célra legmegfelelőbbek.

Azok számára, akik ezt megismerni óhajtják, mellékeljük KLUG munkáinak jegyzékét.

Klug Lipót munkáinak jegyzéke.

Önállóan megjelent munkák.

A harmadrendű térgörbék synthetikai tárgyalása. Pozsony (1881).

A projektív geometria elemei. Budapest (1892).

Ábrázoló geometria. Budapest (1900).

Projektív geometria. Budapest (1903).

Értekezések hazai folyóiratokban.

A pozsonyi főreáliskola Értesítője.

A tetraéderbe írható gömbökről (1877).

A másodrendű kúpfelületek síkmetszései központi vetületben (1880).

A központi vetülettan elemei (1882).

A másodrendű kúp- és hengerfelületek áthatási görbéi (1885).

Perspektív helyzetű tetraéderek az n -méretű térben (1886).

A budapesti II. ker. főreáliskola Értesítője.

A Pascal-hatszög analogonja az egyenesen (1894).

Műegyetemi Lapok.

Néhány, a konfokális kúpszeletcsereggel kapcsolatos mértani helyről.
1. (1876) 229.

Matematikai és Fizikai Lapok.

Desargues egyik tételéről. 2. (1898) 394.

Tételek a paraboláról és a hiperbolikus paraboloidról. 3. (1894) 166.

Észrevételek az «Egy helyzetgeometriai tétel a tetraéder éleiről» c. cikkhez. 4. (1895) 21.

A harmonikus pólusról. 4. (1895) 273. és 5. (1896) 67.

Tételek a háromélről. 5. (1896) 258.

Tételek az egyágú hiperboloidról. 7. (1898) 211.

Észrevételek «Egy elemi geometriai tétel» c. cikkhez. 8. (1899) 71.

Desmikus rendszerek. 8. (1899) 327.

Desmikus helyzetű tetraéderrendszerek síkmetszései. 8. (1899) 175.

Tételek a másodrendű kúpról. 9. (1900) 331.

Hiperboloidikus fekvésű egyenesekről. 12. (1903) 153.

A kúpszelet mint geometriai hely. 13. (1904) 255, 323 és 14. (1905) 57.

A kört projiciáló különös kúpok csúcsainak geometriai helyéről. 15. (1906) 367.

Két konfigurációról. 17. (1908) 1.

A másodrendű felület- és a tetraéderből lezármaztatható hiperboloidikus fekvésű egyenesekről. 20. (1911) 157.

Az egyenoldalú tetraéderről. 27. (1918) 45.

Egy különös triederről. 36. (1929) 35.

Kúpszeletek és evolutáik simulóköreinek szerkesztése. 38. (1931) 29.

A kúpszeletek simulókörei. 47. (1940) 27.

Konjugált kúpszelethármasok és különös eseteik. 48. (1941) 144.

Az Erdélyi Múzeum-Egylet Orvos-Természettudományi Értesítője.

Az általános és négy különös Pascal-hatszög konfigurációja. 19. (1897) 101.

A köbös involutióról. 20. (1898) 95.

A Pascal-hatszög konfigurációja két különös imaginárius hatszög esetében. 21. (1899) 1.

Különös másodrendű kúpok. 22. (1900) 72.

(Mind a négy értekezés megjelent németül is ugyanott.)

Értekezések a matematikai tudományok köréből. (A M. Tud. Akadémia kiadása.)

Perspektív helyzetű alakulatok. 9. (1883.) XI. füzet.

A Magyar Tud. Akadémia Mat. és Term. Értesítője.

- Kúpszeletbe írt háromszögek közös magasságponttal. **40.** (1923) 161.
 Kúpszelet köréírt háromszögek közös magasságponttal. **40.** (1923) 168.
 Másodrendű felületbe írt tetraéderek közös magasságponttal. **41.** (1925) 33.
 Másodrendű felület köré írt tetraéderek közös magasságponttal. **41.** (1925) 47.
 Másodrendű felületek orthocentrikus poláris tetraéderei. **42.** (1925) 88.
 Többfélekep involúciós pontesoportok. **43.** (1926) 44.
 Élivel gömböt érintő tetraéderek. **44.** (1927) 477.
 Konfokális kúpszeletekről. **45.** (1928) 584.
 Kúpszeletekre és másodrendű felületekre vonatkozó néhány tétel általánosítása. **47.** (1930) 110.
 Desmikus négyszögek. **48.** (1931) 257.
 Az involúció újabb tulajdonságai. **49.** (1932) 16.
 A Desargues-féle konfiguráció kibővítése (német szöveg). **51.** (1934) 70.
 Adalékok a poláris-tér struktúrájának ismeretéhez (német sz.). **51.** (1934) 134.
 Kúpszeletek és másodrendű felületek képei különös esetekben. **51.** (1934) 199.
 Élivel gömböt érintő tetraéder. **61.** (1942) 23.
Acta Litterarum ac Scientiarum. (Sectio Scientiarum Mathematicarum.) Szeged.
 Einige Sätze über Kegelschnitte. **1.** (1923) 187.
 Über konjugierte Kegelschnittstripel. **2.** (1925) 167.
Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn.
 Az 1901—1932. évfolyamokban oly cikkek, amelyek már magyarul megjelentek.

Értekezések idegen folyóiratokban.

- Archiv der Mathematik und Physik. Berlin—Leipzig.*
 Über einen geometrischen Ort. I. **67.** (1882) 330.
 Die Entwicklung des Euler-schen Algorithmus. I. **67.** (1882) 337.
 Beitrag zur Geometrie der Lage. I. **70.** (1884) 446.
 Perspektive Dreiecke, die einem Kegelschnitt einbeschrieben sind. II. **1.** (1884) 292.
 Einige Sätze über das Viereck und Kegelschnittbüschel II. **1.** (1884) 304.
 Konstruktion der den Brennpunkten entsprechende Punkte im collinearem Systeme. II. **6.** (1888) 88.

Über mehrfach perspektive Tetraeder. II. **6.** (1888) 96.

Synthetischer Beweis eines Satzes von K. Doehlemaun. III. **8.** (1905) 157.

Über Steiner'schen Geraden des Sechseckes, in welchen die Kanten eines Tetraeders eine Fläche zweiter Ordnung schneiden. III. **17.** (1911) 283.

Einige Sätze über Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. III. **21.** (1913) 317.

Monatshefte für Mathematik und Physik. Wien.

Über der einem Dreikant umschriebenen Rotationskegel **8.** (1897) 54.

Über den harmonischen Pol. **8.** (1897) 361.

Einige Sätze über Kegelscharen. **9.** (1898) 110.

Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf den n -dimensionalen Raum. **10.** (1899) 84.

Staudt'sche Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck etc. **10.** (1899) 198.

Einige Sätze über collineare und ähnliche Felder. **13.** (1902) 361.

Desmischen Vierseiten und Kegelschnittssysteme. **14.** (1903) 74.

Einige Sätze über Kegel zweiter Ordnung. **14.** (1903) 92.

Konstruktion der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung. **17.** (1906) 44.

Über die Orte der Punkte, aus welchen ein Kreis durch spezielle Kegel projiziert wird. **17.** (1906) 241.

Über zwei Configurationen. **30.** (1920) 3.

Über ein Dreikant dessen Seitensumme zwei Rechte beträgt. **30.** (1920) 44.

Die Verallgemeinerung der Feuerbach'schen Sätze über den Neunpunktekreis. **30.** (1920) 131.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien.

Konstruktion der Perspektivumrisse und der ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung. **113.** IIa. (1904) 1317.

Konstruktion des Reliefs einer Fläche zweiter Ordnung. **114.** IIa. (1905) 65.

*

Megoldott és kitűzött feladatok a Matematikai és Fizikai Lapok, a Nouvelles Annales de Mathématiques, az Archiv für Mathematik und Physik, a Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok és a Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok 1903—1943. évfolyamaiban.

Zigány Ferenc.

KOMBINATORIKAI VIZSGÁLATOK AZ IRÁNYÍTOTT TELJES GRÁFFAL KAPCSOLATBAN.

Bevezetés.

Tekintsük az A_1, A_2, \dots, A_n szögponthoz tartozó *teljes gráfot* ($n \geq 2$), vagyis az összes $A_i A_k$ *élek* halmazát ($i \neq k$), és adjunk mindegyik élnek egy meghatározott *irányítást*. Az így nyert *irányított teljes G gráfban* a szögpontok valamely B_1, B_2, \dots, B_l ismétlés nélküli variációját RÉDEI¹ szerint *rendezettnek* fogjuk

nevezni, ha a $\overrightarrow{B_1 B_2}, \overrightarrow{B_2 B_3}, \dots, \overrightarrow{B_{l-1} B_l}$ élek szerepelnek G -ben, vagyis, ha emez élekből álló *élvonal* befutása B_1 -től B_l -ig mindenütt a gráf irányítása szerint történik. Az ilyen élvonalat *pályának* nevezzük. Az értelmezésből nyilvánvaló, hogy a pályának mindig eggyel kevesebb éle van szögpontjainak számánál. Az $l=n$ esetben rendezett szögpontpermutációról, illetve *teljes pályáról* beszélünk. A teljes pálya tehát a gráf összes szögpontjait tartalmazza.² Bármely pálya teljes pályája a szögpontjai által meghatározott teljes részgráfnak.

Jelöljük a G gráf összes teljes pályáinak számát (G) -vel. Dolgozatunkban főleg ezzel a (G) számossággal fogunk foglalkozni. Ránézve eddig ismeretes egyetlen eredmény RÉDEI¹ *tétele*, amely azt mondja ki, hogy (G) *mindig páratlan szám*.

Ennek a tételnek azt a következményét, hogy G -nek mindig van legalább egy teljes pályája, a szögpontok n száma szerint

¹ RÉDEI L., Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litterarum ac Scientiarum* (Sectio Scientiarum Mathematicarum), Szeged, 7 (1934), 39—43. l.

² E szerint a «teljes» jelzőt gráffal kapcsolatban más értelemben használjuk, mint pályával kapcsolatban.

haladó teljes indukcióval egyszerűen be lehet bizonyítani,³ de magának a tételnek a bizonyítása nem egészen könnyű.

A RÉDEI-féle tételt a 2. §-ban új módszerrel bizonyítjuk be. A tétel három irányban is általánosítható.

I. A legtermészetesebb általánosítás kérdése GRÜNWARD TIBORTól való s a felelet ugyancsak RÉDEINÉL¹ található. Ez az általánosítás a G gráf l szögpontú (vagyis $l-1$ élű) pályáinak számát határozza meg párosság tekintetében, s azt mondja ki, hogy ez a szám egyező párosságú $\binom{n}{l}$ -el. Ez az eredmény RÉDEI tételének a G -ből kiválasztható $\binom{n}{l}$ számú l szögpontú teljes részgráfra való alkalmazásával közvetlenül nyerhető. Az $l=n$ eset révén ez a tétel magában foglalja a RÉDEI-féle tételt.

II. Tekintsük a G gráf valamennyi ($n!$ számú) szögpont-permutációját, és sorozzuk ezeket n osztályba a szerint, hogy valamely B_1, B_2, \dots, B_n permutációban hány olyan $B_i B_{i+1}$ szomszédos szögpontpár van, mely G -ben $\overleftarrow{B_i B_{i+1}}$ éllel van összekötve.² Ha ez a szám k , a szögpontpermutációt a k -adik osztályba sorozzuk ($0 \leq k \leq n-1$). G teljes pályáit e szerint a 0-adosztályú szögpontpermutációk jelölik ki, úgyhogy a k -adik osztályba sorozott szögpontpermutációk számát $(G)_k$ -val jelölve: $(G)_0 = (G)$. Az is közvetlenül világos, hogy $(G)_k = (G)_{n-1-k}$, mert az egyik osztályba tartozó szögpontpermutációk ugyanazok, mint a másikba tartozók visszafelé olvasva. A 3. §-ban megmutatjuk (l. a (8) kongruenciát), hogy $(G)_k$ egyező párosságú $\binom{n-1}{k}$ -val. A $k=0$ esetben ez ismét RÉDEI tételét jelenti.

III. G minden olyan részgráfját, amely egy pályából, vagy több közös szögpont nélküli pályából áll, *pályaösszegnek*⁵ fog-

³ L. KÖNIG D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936), 30. l. (V. ö. még RÉDEI¹ dolgozatában a ³ jegyzettel.)

² Az ilyen élt a tekintetbe vett szögpontpermutációra nézve «negatív» irányításúnak, az ellenkező $\overrightarrow{B_i B_{i+1}}$ esetben «pozitív» irányításúnak fogjuk nevezni. Ilyen értelemben beszélni fogunk arról, hogy valamely szögpontpermutáció bizonyos éleket pozitív irányítással, másokat negatív irányítással «tartalmaz». Ezt a továbbiakban igen hasznosnak bizonyuló elnevezést KALMÁR LÁSZLÓ egyetemi magántanár úrnak köszönhetem.

⁵ Az elnevezés KÖNIG DÉNES professzor úrtól ered, és különleges esete a «gráfösszeg» általa bevezetett fogalmának. (L. a ³ alatt i. m. 14. l.)

juk nevezni.⁶ E részgráfok fontos szerepet töltenek be az alábbi bizonyításokban. Tekintsünk egy k élből és s pályából álló pályaaösszeget. Mivel minden pálya eggyel több szögponthoz tartozik, a pályaaösszeg összesen $k+s$ szögponthoz tartozik. Ennélfogva: $k+s \leq n$, vagyis $1 \leq s \leq n-k$. Ebből az következik, hogy pályaaösszeg $n-1$ -nél több élből nem állhat; mivel továbbá a $k=n-1$ esetben $s=1$, G bármely $n-1$ élű pályaaösszege egy teljes pálya G -ben. G összes k élű pályaaösszegeinek számát $[G]_k$ -val fogjuk jelölni,⁷ úgyhogy $[G]_{n-1} = (G)$.

A 4. §-ban megmutatjuk, hogy $[G]_k$ egyező párosságú $\binom{r}{k}$ -val, ahol $r = \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor$ és $[]$ a «legnagyobb egész» jele. A $k=n-1$ esetben ez is RÉDEI tételét jelenti. Ugyancsak a 4. §-ban látni fogjuk, hogy «tranzitív» (l. alább) irányítású gráf esetében a $[G]_k$ számok azonosak a kombinatorikában és a differenciálszámításban egyaránt nagyfontosságú (másodfajú) STIRLING-féle számokkal.

Magával a tranzitív irányítású gráf különös esetével az 1. §-ban foglalkozunk, egyben előkészületül a későbbiekhez.

Az 5. §-ban a G gráfhoz bevezetünk egy polinomot, melynek segítségével összefüggéseket nyerünk a $[G]_k$ számok közt.

Látni fogjuk azt az egyszerű tényt, hogy tranzitív irányítású G_n esetében $(G_n)=1$, ami RÉDEI tétele szerint rögzített n -nél egyben a (G_n) minimuma. A 6. §-ban az ellenkező, sokkal nehezebb kérdéssel fogunk foglalkozni, a (G_n) maximumának kérdésével (bármely szilárd n mellett). Kimerítő választ erre a kérdésre nem sikerült kapnunk, de ezt a maximumot elég jó (n -től függő) korlátok közé szorítottuk.

Végül megemlítjük, hogy a $(G)_k$ számokra a 3. §-ban nyert eredményünk érdekes alkalmazásra talál abban a permutációkkal

⁶ Egyszerűen igazolható, hogy G valamely részgráfja akkor és csak akkor pályaaösszeg, ha nincs benne sem ciklus (azaz folytatólagosan irányított zárt vonal) sem «elágazás», sem «összefutás». (Elágazáson közös kezdőpontú, összefutáson közös végpontú élpárt értve.)

⁷ Ha szükségesnek látszik a gráf szögpontjainak a számát feltüntetni, G helyett G_n -et, $(G)_k$ helyett $(G_n)_k$ -t, $[G]_k$ helyett $[G_n]_k$ -t fogunk írni.

kapcsolatos kérdésben, melyet SCHRUTKA vetett fel és oldott meg a ¹⁹ jegyzetben említett cikkében.

*

A végből, hogy tárgyalásunkat ne kelljen megszakítanunk, előrebocsátjuk a következőt: Bizonyításainkban többször szerepe lesz a következő *logikai tételnek*,⁸ melyet NETTO a «be- és ki-kapcsolás elvének»⁹ nevez. N elem közül, melyek bármelyike az a_1, a_2, a_3, \dots tulajdonságokkal rendelkezhetik, azoknak az elemeknek a száma, melyeknek megvan az a_i tulajdonsága, legyen N_{a_i} ; azoknak az elemeknek a száma, melyeknek *egyszerre* megvan az a_i és a_k tulajdonsága, $N_{a_i a_k}$, s. i. t. Ekkor az *olyan elemeknek a száma, melyek a tekintetbe vett tulajdonságok egyikével sem rendelkeznek*:

$$N_0 = N - \Sigma N_{a_1} + \Sigma N_{a_1 a_2} - \Sigma N_{a_1 a_2 a_3} + \dots, \quad (1)$$

ahol az l -edik Σ az összes tulajdonságokból alkotható l tagú ismétlés nélküli kombinációkra terjesztendő ki.

Ehhez hozzáfűzhetjük a következő egyszerűen adódó általánosítást, melyet a 3. §-ban szintén alkalmazunk: az *olyan elemeknek a száma, melyek pontosan k tulajdonsággal rendelkeznek*:

$$N_k = \Sigma N_{a_1 a_2 \dots a_k} - \binom{k+1}{1} \Sigma N_{a_1 a_2 \dots a_{k+1}} + \binom{k+2}{2} \Sigma N_{a_1 a_2 \dots a_{k+2}} - \dots \quad (2)$$

A jobboldalon álló kifejezésnek az értékében ugyanis nincsenek képviselve a k -nál kevesebb tulajdonsággal bíró elemek; az olyan elemek továbbá, melyeknek pontosan k tulajdonságuk van, csak az első Σ -t befolyásolják és pedig egy-egy egységgel növelik; végül ha $l > k$, akkor minden l számú tulajdonsággal bíró elem

⁸ L. PÓLYA—SZEGŐ. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, II. VIII. Abschn., 1. Kap., § 21, 119. l. Továbbá SKOLEM, *Gruppierungen, kombinatorische Reziprozitäten, Paarsysteme, Nachtrag* (Kap. 15) zu NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, 2. Aufl. (Leipzig u. Berlin, 1927.), 282. l. — NETTO könyvére az alábbiakban «NETTO» jelzéssel hivatkozunk. — A tétel egy egyszerű esete megtalálható KÜRSCHÁK JÓZSEF *Matematikai Verseny-tételek* (Szeged, 1929) c. művében, 90. l.

⁹ «Das Prinzip des Ein- und Ausschaltens».

$$\binom{l}{k} - \binom{k+1}{1} \binom{l}{k+1} + \binom{k+2}{2} \binom{l}{k+2} - \dots = \\ = \binom{l}{k} - \binom{l}{1} \binom{l-1}{k} + \binom{l}{2} \binom{l-2}{k} - \dots = 0$$

egységgel járul hozzá a (2) kifejezés értékéhez, q. e. d. Ezt a kombinatorikai összefüggést pedig az (1) alapján a következőképpen láthatjuk be: tekintsük elemeknek az $1, 2, \dots, l$ számokból alkotható k tagú ismétlés nélküli kombinációkat, s ezek közül nevezzük a_i tulajdonságúnak az olyanokat, melyek az i számot *nem* tartalmazzák. A fenti kifejezés ekkor az (1) szerint ama kombinációk számát adja meg, melyek a tekintetbe jövő tulajdonságok egyikével sem rendelkeznek, úgyhogy értéke valóban zérus, mert az ilyen kombinációknak az $1, 2, \dots, l$ számok mindegyikét tartalmaznia kellene, jöllehet $l > k$.

1. §.

Több szempontból legegyszerűbb az ú. n. *transzitiv* irányítású teljes gráf szerkezete, melyet a következőkben G^* -gal jelölünk. A transzitiv irányítást úgy értelmezzük, hogy *bármely két, folytatólagos irányítással egymáshoz csatlakozó* $\overrightarrow{A_i A_k}$ és $\overrightarrow{A_k A_l}$ él esetében az $A_i A_l$ él irányítása: $\overrightarrow{A_i A_l}$.^{10, 11} Közvetlenül világos, hogy a G^* gráfnak nincs két olyan szögpontja, melyből ugyanannyi él van «kifelé irányítva». Legyen ugyanis C és D a G^* gráf két tetszőleges szögpontja, és kösse össze ezeket a \overrightarrow{CD} él. Ekkor a transzitiv irányítás folytán mindamaz X szögpontokba ($X \neq D$), melyekbe D -ből \overrightarrow{DX} él vezet, C -ből is \overrightarrow{CX} él vezet, úgyhogy C -ből legalább eggyel több él van kifelé irányítva, mint D -ből.

¹⁰ Ellenkező esetben az $\overrightarrow{A_i A_k}$, $\overrightarrow{A_k A_l}$, $\overrightarrow{A_l A_i}$ élek *ciklikus* háromszöget alkotnak. A három szögpontú irányított teljes gráf e szerint kétféle típusú lehet: az egyiket transzitiv, a másikat ciklikus háromszögnek fogjuk nevezni. Az előbbinek egy, az utóbbinak három teljes pályája van.

¹¹ Az értelmezésből következik, hogy transzitiv irányítású gráfban ciklus nincs, és fordítva: ha G nem tartalmaz ciklust, akkor irányítása transzitiv. — A transzitiv irányítású gráf fogalmát KÖNIG DÉNES professzor úr vezette be³ alatt idézett könyvében (93. l.). A transzitiv irányítású teljes gráf nála «Ordnungsgraph» néven szerepel (108—109. l.).

Ebből a megállapításból következik, hogy a G^* gráf szerkezete a tranzitív irányítás követelményével egyértelműen meg van határozva.¹² Mivel ugyanis a G^* gráfnak nincs két olyan szögpontja, melyből ugyanannyi él volna kifelé irányítva, a gráf szögpontjait olyan A_1, A_2, \dots, A_n sorozatba rendezhetjük, hogy az A_k -ból kifutó élek számát a_k -val jelölve: $n-1 \geq a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n \geq 0$. Ezt a követelményt pedig az a_k egész számok csak akkor elégítik ki, ha $a_k = n - k$. Ennélfogva az A_1 szögpontról minden él kifelé van irányítva; A_2 -ből az $\overrightarrow{A_1 A_2}$ él kivételével szintén; A_3 -ból az $\overrightarrow{A_1 A_3}$ és $\overrightarrow{A_2 A_3}$ él kivételével szintén, s. i. t. A G^* gráf szögpontjait tehát mindig elláthatjuk az $1, 2, \dots, n$ indexekkel úgy, hogy minden szögpontról a nála nagyobb indexűekbe és csak azokba irányuljon él. A továbbiakban a G^* gráf szögpontjait mindig ilyen módon jelöljük.

G^* -nak mindig pontosan egy teljes pályája van, t. i. az $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_n}$ pálya.¹³ Egyéb teljes pálya ugyanis azért nem lehetséges G^* -ban, mert az $1, 2, \dots, n$ indexek bármely más permutációjában van inverziót alkotó szomszédos elempár, tehát a megfelelő élvonalon ott az előirt irányítással ellentétes irányú él lép fel.

A kimutatott sajáttság jellemzi a tranzitív irányítású gráfot, azaz megfordítva: ha a G gráfnak pontosan egy teljes pályája van, akkor a gráf irányítása tranzitív. Jelöljük ugyanis a szögpontokat úgy, hogy ez az egyetlen teljes pálya $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_n}$ legyen. Megmutatjuk, hogy e jelölésnél minden szögpontról a nála nagyobb indexű szögpontokba és csak azokba irányul él. Tegyük fel ugyanis, hogy a gráfnak van «kivételes irányítású», vagyis olyan éle, mely nagyobb indexű szögpontról kisebb indexűbe irányul. Válasszuk ki a legkisebb indexű A_i szögpontot, melyben végződik kivételes irányítású él, s legyen j a

¹² Ezen azt értjük, hogy két (ugyanannyi szögpontú) tranzitív irányítású teljes gráf irányításával együtt mindig leképezhető egymásra.

¹³ A teljes pálya különleges esete a KÖNIG-féle «élbázis» fogalmának (id. mű 92. l.) s így az a tény, hogy $(G^*) = 1$, az ő VII. 9. tételének (94. l.) is folyománya.

legnagyobb olyan index, mellyel az $\overrightarrow{A_j A_i}$ él kivételes irányítású ($j > i$), úgyhogy az $\overrightarrow{A_{i-1} A_{i+1}}$ és $\overrightarrow{A_i A_{j+1}}$ él *ilyen* irányítással szerepel. Ekkor azonban

$$\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_j A_i A_{j+1} \dots A_n}$$

egy másik teljes pályája volna a tekintetbe vett gráfnak, feltevésünkkel ellentétben.¹⁴ Ennélfogva a G gráfnak nincs kivételes irányítású éle, q. e. d.

2. §.

Mivel a tetszőlegesen irányított G gráf előállítható az (ugyanannyi szögpontú) G^* gráfból bizonyos élek irányításának megfordításával, s mivel G^* -nak pontosan egy teljes pályája van, a RÉDER-féle tétel egyenlő értékű a következő állítással: *a G gráf tetszőleges \vec{e} élének irányítását megfordítva, (G) páros számmal változik meg.*

Jelöljük az \vec{e} él irányításának megfordításával keletkező gráfot G' -vel, s azoknak a teljes pályáknak a számát, melyek G -ben az \vec{e} élt, illetve G' -ben az \vec{e} élt tartalmazzák: $(G)_e$ -vel, illetve $(G')_e$ -vel. Mivel a többi teljes pálya azonos a két gráfban, azt kell megmutatnunk, hogy

$$(G') - (G) = (G')_e - (G)_e \equiv (G')_e + (G)_e \equiv 0 \pmod{2}. \quad (3)$$

A továbbiakra nézve állapotjunk meg abban, hogy ha egy véges teljes gráfban az éleknek csak bizonyos részhalmaza van irányítva, akkor e gráfnak *teljes pályáján* értsünk minden olyan szögpontpermutációt, melyben *nem lép fel «negatív irányítású»* él.¹⁵ Ekkor a (3) kongruenciában fellépő összeg egyenlő ama G'' gráfban az e irányítás nélküli élt tartalmazó teljes pályák számával, melyet G -ből az \vec{e} él irányításának megszüntetésével nyerünk. Ennélfogva a (3) helyessége az alábbi állításból következik:

¹⁴ Az $i=1$ vagy $j=n$ eset sem kivétel.

¹⁵ L. a ⁴ jegyzetet. — Az ilyen szögpontpermutációban tehát irányítás nélküli éllel összekötött szögpontok is szerepelhetnek egymás mellett (éspedig tetszőleges sorrendben).

Ha az n szögpontú teljes gráf éleinek csak bizonyos rész-halmazát irányítjuk, akkor a gráf összes olyan teljes pályáinak száma, melyek tartalmaznak irányítás nélküli élt, páros.

E § további részében ezt a (részben irányított) gráfot jelöljük G -vel, \vec{G} -vel pedig a G irányított éleiből álló részgráfot. Azoknak a teljes pályáknak a száma, melyekre állításunk vonatkozik: $(G) - (\vec{G})$, ha (\vec{G}) -vel a G gráf olyan teljes pályáinak számát jelöljük, melyek csak irányított élt tartalmaznak. Állításunk tehát azt jelenti, hogy

$$(G) \equiv (\vec{G}) \pmod{2}. \quad (4)$$

Az alábbiakban ezt igazoljuk.

A $B_1 B_2 \dots B_n$ szögpontpermutáció nyilván akkor és csak akkor határoz meg teljes pályát, ha a megfordított $B_n B_{n-1} \dots B_1$ permutáció nem tartalmaz (az utóbbira nézve) pozitív irányítású élt. (L. a ⁴ jegyzetet.) Ennélfogva (G) egyenlő a G gráf ama szögpontpermutációinak számával, melyek nem tartalmaznak pozitív irányítású élt. Ezt a számot az (1) logikai képlet segítségével meghatározhatjuk. E célból tekintsük «elemeknek» G valamennyi, $N = n!$ számú szögpontpermutációját. Miután \vec{G} éleit (valamilyen sorrendben) megszámoztuk, ruházzuk fel az a_i tulajdonsággal azokat (és csak azokat) a szögpontpermutációkat, melyek \vec{G} i -edik élt pozitív irányítással tartalmazzák. Ekkor a tekintetbe jövő tulajdonságok egyikével sem rendelkező szögpontpermutációk N_0 száma az előbbi megjegyzésünk szerint (G) -t adja meg. Határozzuk meg az (1) jobboldalán fellépő k -adik Σ értékét a jelen esetben. Ez az összeg annyi tagból áll, ahányféleképpen kiválasztható k él a \vec{G} részgráfból úgy, hogy van hozzájuk olyan szögpontpermutáció, amelyben ezek az élek pozitív irányítással szerepelnek. Ehhez szükséges, hogy a kiválasztott élek pályaeösszeget alkossanak ¹⁶ (tehát a Bevezetés III. pontja

¹⁶ Valamely szögpontpermutáció pozitív irányítású élei ugyanis mindig egy teljes pálya éleinek (esetleg nem valódi) részhalmazaként foghatók fel. Ebből pedig nyilvánvalóan következik, hogy az említett éleknek pályaeösszeget kell alkotniuk.

szerint mindenestre $k \leq n-1$). Megmutatjuk továbbá, hogy a \vec{G} részgráfból kiválasztható $[\vec{G}]_k$ számú k -számú élt tartalmazó pályaösszeg bármelyikének minden éle pontosan $(n-k)!$ szög-pontpermutációban szerepel pozitív irányítással, úgyhogy az (1) jobboldalán fellépő k -adik Σ értéke: $(n-k)! [\vec{G}]_k$.

Állításunk igazolására tekintsük a \vec{G} részgráfból kiválasztható k élt pályaösszegek egyikét, s álljon ez s számú pályából. Ekkor (mint a Bevezetésben láttuk) a pályaösszeg $k+s$ szögpon tot foglal le. Mármost mindama szögpon tpermutációkat, melyekben a kiszemelt pályaösszeg élei (pozitív irányítással) szerepelnek, nyilván úgy nyerjük, hogy a pályaösszeg s számú pályáját és a pályaösszeg által még le nem foglalt $n-(k+s)$ szögpon tot permutáljuk. Mivel így összesen $n-k$ elemet permutálunk, az összes lehetőségek száma valóban $(n-k)!$.

Meggondolásaink szerint tehát G teljes pályáinak számosságára az (1) alapján a következő összefüggést kapjuk:

$$(G) = n! - (n-1)! [\vec{G}]_1 + (n-2)! [\vec{G}]_2 - \dots + \\ + (-1)^{n-2}! [\vec{G}]_{n-2} + (-1)^{n-1} [\vec{G}]_{n-1}. \quad (5)$$

Ennélfogva:

$$(G) \equiv [\vec{G}]_{n-1} \pmod{2}.$$

Ha még tekintetbe vesszük a $[\vec{G}]_{n-1} = (\vec{G})$ összefüggést,¹⁷ az igazolandó (4) kongruencia áll előttünk.

3. §.

A továbbiakban G -vel ismét olyan n szögpon tús teljes gráfot jelölünk, melynek minden éle irányítva van. Ekkor a \vec{G} rész-gráf azonos G -vel, úgyhogy a teljes pályák (vagyis a Bevezetés II. pontjában értelmezett 0-adosztályú szögpon tpermutációk) számára talált (5) összefüggés így írható:

$$(G) = (G)_0 = n! - (n-1)! [G]_1 + \\ + (n-2)! [G]_2 - \dots + (-1)^{n-1} [G]_{n-1}. \quad (6)$$

¹⁷ Ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint a Bevezetés III. pontjában az irányított teljes gráfra vonatkozó $[G]_{n-1} = (G)$ összefüggést.

Hasonló összefüggés vezethető le a k -adosztályú szögpont-permutációk számosságára. Ebbe az osztályba azokat a szögpont-permutációkat soroztuk, melyekben pontosan k negatív irányítású él szerepel. Ezen permutációk megfordítottjai pontosan k pozitív irányítású élt tartalmaznak, úgyhogy $(G)_k$ -t az utóbbiak számaként határozhatjuk meg. Tekintsük ismét «elemeknek» a G gráf szögpontpermutációit, s értsük az egyes «tulajdonságokon» továbbra is azt, hogy valamely szögpontpermutáció G egy-egy élét pozitív irányítással tartalmazza. Így a (2) összefüggésben szereplő N_k az előbbi megjegyzésünk szerint $(G)_k$ -val egyenlő. A (2) jobboldalán szereplő Σ -k ugyanazok, mint az (1)-ben szereplők, utóbbiakat viszont a (6) révén már ismerjük. Ennél fogva:

$$(G)_k = (n-k)! [G]_k - \binom{k+1}{1} (n-k-1)! [G]_{k+1} + \\ + \binom{k+2}{2} (n-k-2)! [G]_{k+2} - \dots + (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{n-1-k} [G]_{n-1}. \quad (7)$$

Tehát:

$$(G)_k \equiv \binom{n-1}{n-1-k} [G]_{n-1} = \binom{n-1}{k} [G]_{n-1} \pmod{2}.$$

Ha itt még alkalmazzuk a RÉDEI-féle:

$$[G]_{n-1} = (G) \equiv 1 \pmod{2}$$

tételt, előttünk áll a tételnek a Bevezetés II. pontjában jelzett általánosítása:

$$(G)_k \equiv \binom{n-1}{k} \pmod{2}. \quad (8)$$

A Bevezetésben említett

$$(G)_k = (G)_{n-1-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]-1) \quad (9)$$

egyenletek a (7) tekintetbevételével a $[G]_k$ számokra fennálló egyenletekhez vezetnek. Az 5. §-ban más úton e helyett egy másik, vele ekvivalens, de áttekinthetőbb egyenletrendszerhez jutunk (l. a (18) egyenletrendszert).¹⁸

Alkalmazzuk a (7) összefüggést a tranzitív irányítású G^* gráf esetére. Ha e gráf szögpontjait az 1. §-ban megállapított módon

¹⁸ Ez hosszadalmas, de elemi számítással igazolható.

jelöljük, akkor minden szögpontból a nála nagyobb indexű szögponthoz irányul él. Ennélfogva a G^* gráf k -adosztályú szögpontpermutációi az $1, 2, \dots, n$ szögpontindexek ama permutációival adhatók meg, melyekben pontosan k számú szomszédos elempár alkot inverziót. Az ilyen permutációk $(G^*)_k$ számát¹⁹ a (7) alapján felírhatjuk, ha tekintetbe vesszük a $[G^*]_i$ számoknak (a következő §-ban kiszámítandó) értékét (l. a (10) összefüggést):

$$[G^*]_i = \frac{1}{(n-i)!} \sum_{l=0}^{n-i-1} (-1)^l \binom{n-i}{l} (n-i-l)^n.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} (G^*)_k &= \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \binom{n-k}{l} (n-k-l)^n - \\ &\quad - \binom{k+1}{1} \sum_{l=0}^{n-k-2} (-1)^l \binom{n-k-1}{l} (n-k-1-l)^n + \\ &\quad + \binom{k+2}{2} \sum_{l=0}^{n-k-3} (-1)^l \binom{n-k-2}{l} (n-k-2-l)^n - \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} = \\ &= \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \left[\binom{n-k}{l} + \binom{k+1}{1} \binom{n-k-1}{l-1} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{k+2}{2} \binom{n-k-2}{l-2} + \dots + \binom{k+l}{l} \right] (n-k-l)^n = \\ &= \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \binom{n+1}{l} (n-k-l)^n; \end{aligned}$$

ugyanis $(-1)^l (n-k-l)^n$ együtthatója:

$$\binom{k}{0} \binom{n-k}{l} + \binom{k+1}{1} \binom{n-k-1}{l-1} + \dots + \binom{k+l}{l} \binom{n-k-l}{0} = \binom{n+1}{l}.$$

¹⁹ Ezt a problémát megoldotta L. SCHRUTKA, Eine neue Einteilung der Permutationen c. dolgozatában, *Math. Annalen*, 118 (1941), 246. l. Eredménye a fentiből $(G^*)_k = (G^*)_{n-1-k}$ tekintetbevételével adódik.

[Ezt az ismert kombinatorikai összefüggést²⁰ egyszerűen a következő módon láthatjuk be: számítsuk ki ama lehetőségek számát, ahányféleképpen $k+1$ piros és $n-k-l+1$ zöld (tehát összesen $n-l+2$) golyó közül l -et kihúzzhatunk, ha újabb húzás előtt a kivett golyót mindig visszatesszük, és ha a golyók kihúzásának sorrendje nem számít. Ez a szám nyilván az $n-l+2$ elemből alkotható l tagú ismétléses kombinációk száma, vagyis $\binom{n+1}{l}$. A fenti összefüggés baloldalán viszont azoknak az eseteknek megfelelő húzási lehetőségek száma van összeadva, amikor az összes golyó zöld, illetve egy golyó piros és a többi zöld stb.].

4. §.

A RÉDEI-féle tételnek a Bevezetés III. pontjában jelzett általánosításához a következő három lépésben jutunk el: először kiszámítjuk a $[G^*]_k$ számokat; azután megmutatjuk, hogy tetszőlegesen irányított teljes G gráf esetében $[G]_k$ egyező párosságú $[G^*]_k$ -val; végül megállapítjuk a $[G^*]_k$ szám párosságát.

I. Tekintsük a G^* gráf egyik k élű pályaösszegét, és álljon ez s számú pályából. Mint láttuk, az ilyen pályaösszeg $k+s$ szögpontot tartalmaz. Osszuk be G^* összes szögpontjait halmazokba úgy, hogy a kiszemelt pályaösszeg egy-egy pályájának szögpontjai egy-egy halmazt alkossanak, míg a többi $n-(k+s)$ szögpont egyenként alkosson egy-egy halmazt. Az összes halmazok száma $n-k$ (független s -től). G^* szögpontjainak eme beosztását a pályaösszeg egyértelműen meghatározza.

Fordítva: ha a G^* gráf n szögpontját $n-k$ halmazba osztjuk be olyan módon, hogy mindegyik szögpont egy és csak egy halmazban szerepeljen, s mindegyik halmazba kerüljön legalább egy szögpont, akkor ezzel a beosztással egyértelműen meghatároztunk G^* -ban egy k élű pályaösszeget. Tekintsük ugyanis először azokat a halmazokat, melyek egynél több szögpontot tartalmaznak, s reprezentálja e halmazok mindegyikét az a pálya, mely az illető halmazba sorozott szögpontokat összeköti. (Ez a pálya egyértelműen meg van határozva, mert G^* bármely teljes részgráfja is tranzitív irányítású). Az így kijelölt pályák

²⁰ L. NETTO 251. l., (26) egyenlet.

pályaösszeget alkotnak, mivel nincs közös szögpontjuk. Ha most egyöntetűség kedvéért azt mondjuk, hogy a többi (egy szögpontot tartalmazó) halmazt egy-egy «0-élű pálya» reprezentálja, akkor az $n-k$ halmaz mindegyikéhez eggyel kevesebb élű pályát rendeltünk hozzá, mint ahány szögpontja van az illető halmaznak, úgyhogy a tekintetbevetett beosztás által *egyértelműen* meghatározott pályaösszeg éleinek száma valóban $n-(n-k)=k$.

$[G^*]_k$ ezek szerint *egyenlő ama lehetőségek számával, ahány-féleképpen n elemet $n-k$ (nem üres) halmazba beoszthatunk.* Ha a halmazok sorrendjét átmenetileg megkülönböztetjük (azaz az $1, 2, \dots, (n-k)$ sorszámmal látjuk el őket), a beosztások száma nyilván $(n-k)! [G^*]_k$ lesz. Ezt a számot az (1) logikai képlet segítségével meghatározhatjuk.²¹ Nevezzük a sorszámmal ellátott halmazokat első, második, ..., $(n-k)$ -edik «osztálynak», és engedjük meg átmenetileg azt is, hogy egyes osztályok üresen maradjanak. Ekkor az összes beosztási lehetőségek száma $N = (n-k)^n$, mert mindegyik elem mindegyik osztályba kerülhet. Nevezzük a_i tulajdonságúnak az olyan beosztást, melynél az i -edik osztály üresen marad. Így az (1) jobboldalán fellépő l -edik Σ értéke: $\binom{n-k}{l} (n-k-l)^n$, mert l üresen maradó osztály $\binom{n-k}{l}$ -féleképpen választható ki, a többi $n-k-l$ osztály pedig $(n-k-l)^n$ -féleképpen tölthető be az n elemmel. Amint láttuk, N_0 a jelen esetben $(n-k)! [G^*]_k$ -val egyenlő, úgyhogy:

$$(n-k)! [G^*]_k = (n-k)^n - \binom{n-k}{1} (n-k-1)^n + \\ + \binom{n-k}{2} (n-k-2)^n - \dots + (-1)^{n-k-1} \binom{n-k}{n-k-1}.$$

Tehát:

$$[G^*]_k = [G_n^*]_k = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \binom{n-k}{l} (n-k-l)^n = \\ = \frac{1}{m!} \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \binom{m}{l} (m-l)^n, \quad (10)$$

ahol $m = n-k$.

²¹ Ez a számítás megtalálható SKOLEM idézett munkájában (8 jegyzet). L. NETTO, 283. l.

A (10) kifejezéssel meghatározott számok a (másodfajú) STIRLING-féle számok. Szokásos jelölésük: ²²

$$[G_n^*]_k = \mathfrak{S}_n^{n-k} = \mathfrak{S}_n^m. \quad (10a)$$

A (10) kifejezést a differenciaszámítás Δ -operátorával rövidebben így jelölhetjük: ²³

$$[G_n^*]_k = \left. \frac{\Delta^{n-k} x^n}{(n-k)!} \right|_{x=0} = \left. \frac{\Delta^m x^n}{m!} \right|_{x=0} = \mathfrak{S}_n^m. \quad (10b)$$

II. A tetszőlegesen irányított n szögpontú teljes G gráf k élű pályaeösszegeinek meghatározásánál szintén abból indulhatunk ki, hogy a gráf szögpontjait minden lehetséges módon beosztjuk $n-k$ halmazba. Csakhogy most egy bizonyos beosztáshoz nem egy, hanem általában több pályaeösszeg tartozik. nevezetesen mindazok, melyeket úgy nyerünk, hogy minden halmazt egy, a beletartozó szögpontokat összekötő pályával reprezentálunk. Ennélfogva $[G_n]_k$ a G_n gráf n szögpontjának $n-k$ halmazba való összes rendezett beosztásainak száma (így nevezve az olyan beosztásokat, melyeknél megkívánjuk, hogy a szögpontok az egyes halmazokon belül rendezett variációt alkossanak). Az n szögpont $n-k$ halmazba való $[G_n^*]_k$ számú beosztásának mindegyikéből ilyen módon annyi rendezett beosztás adódik, amennyi a szögponthalmazokhoz tartozó teljes irányított részgráfok teljes-pálya-számának szorzata (megállapodva abban, hogy 1 szögpontból álló részgráf „teljes pályáinak számán” 1-et értünk), ami a RÉDER-féle tétel szerint páratlan szám. $[G_n]_k$ ennél fogva $[G_n^*]_k$ számú páratlan szám összegével egyenlő, úgyhogy:

$$[G_n]_k \equiv [G_n^*]_k \pmod{2}. \quad (11)$$

Megjegyezzük, hogy $[G_n]_0 = [G_n^*]_0 = 1$ (mint az n szögpont n halmazba való beosztási lehetőségeinek száma). Továbbá:

$$[G_n]_1 = [G_n^*]_1 = \binom{n}{2} \quad (\text{mint az } n \text{ szögpontú teljes gráf összes}$$

²² L. CH. JORDAN, *Calculus of Finite Differences* (Budapest, 1939), 169. l. (3). E művet ezután „JORDAN” jelzéssel idézzük.

²³ L. JORDAN, 168. l. (1).

éleinek száma). A későbbiekben felhasználandó egyszerű összefüggést állapíthatunk még meg $[G_n]_2$ és $[G_n^*]_2$ közt, nevezetesen:

$$[G_n]_2 = [G_n^*]_2 + 2c_3(G_n), \quad (12)$$

ahol $c_3(G_n)$ a G_n gráf *ciklikus háromszögeinek* száma (l. a ¹⁰ jegyzetet). Tekintsük ugyanis egyidejűleg a G_n^* és G_n gráfot. Egy kétélű pályaösszeg vagy két közös szögpont nélküli élből, vagy egy kétélű pályából áll. Az első lehetőség ugyanannyiféleképpen valósítható meg a két gráfban. A második lehetőséget úgy valósíthatjuk meg, hogy mindkét gráfban kiválasztunk három szögpontot, s összekötjük őket egy-egy kétélű pályával. G_n^* -ban ez az összekötés mindig egyféleképpen lehetséges (mert G_n^* bármely háromszöge tranzitív). G_n -ben viszont háromféleképpen vagy egyféleképpen lehetséges az összekötés, a szerint, hogy a kiválasztott szögpontok ciklikus, vagy tranzitív háromszöget határoznak-e meg. Tehát $[G_n]_2$ valóban kétszerannyival több $[G_n^*]_2$ -nél, mint ahány ciklikus háromszöge van G_n -nek.

III. A (11) folytán elegendő a $[G_n^*]_k$ számok párosságát meghatározni. Ezt pedig a következő összefüggés segítségével érhetjük el, amely egyébként világosan mutatja a (másodfajú) STIRLING-féle számok kombinatorikai fontosságát: $[G_n^*]_k$ *egyenlő az 1, 2, ..., n-k számokból ismétléssel alakítható k tagú «kombinációs-szorzatok» összegével.*²⁴

Osztályozzuk ugyanis a G_n^* gráf k élű pályaösszegeit a szerint, hogy melyik az a k szögpont, amelybe a pályaösszeg élei irányulnak. Ezek az A_2, A_3, \dots, A_n szögpontoknak valamely ismétlés nélküli k tagú kombinációját alkotják (mivel az A_1 szögpontból minden él kifelé van irányítva). Tekintsük tehát a megfelelő szögpontindexek egyik i_1, i_2, \dots, i_k kombinációját ($2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$), s határozzuk meg ama k élű pályaösszegek számát, amelyeknek élei éppen ezekkel az indexekkel ellátott szögpontokba irányulnak. A_{i_1} -be $i_1 - 1$ él irányul; ezek egyikét kiválasztva, az A_{i_2} -be irányuló $i_2 - 1$ él közül már csak *annak az egynek kivételével* választhatunk, amely a már kiválasztott első él kezdőpontjából indul ki.²⁵ Ennélfogva a má-

²⁴ L. JORDAN, 176. l.

sodik élt i_2-2 közül, hasonló okokból a harmadikat i_3-3 közül, ... s. i. t. választhatjuk ki. A kiszemelt szögpontkombinációhoz »tartozó» pályaösszegek száma tehát:

$$(i_1-1)(i_2-2)(i_3-3)\dots(i_k-k);$$

ez egy olyan szorzat, melynek tényezői az $1, 2, \dots, n-k$ számok valamely k tagú ismétléses kombinációját alkotják.

Fordítva: minden ilyen ismétléses j_1, j_2, \dots, j_k kombináció ($1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n-k$) tagjainak szorzata G_n^* ama pályaösszegeknek számát adja meg, melynek élei a $j_1+1, j_2+2, \dots, j_k+k$ indexű szögpontokba irányulnak. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Ennélfogva $[G_n^*]_k$ egyező párosságú a szóban forgó kombinációs-szorzatok közül azoknak a számával, melyek értéke páratlan szám; vagyis ama lehetőségek számával, ahányféleképpen az $1, 2, \dots, n-k$ számokból ismétléssel kiválaszthatunk k páratlant. Mivel pedig e számok közt $\left[\frac{n-k+1}{2}\right]$ páratlan van, azért $\left[\frac{n-k+1}{2}\right] + k - 1 = \left[\frac{n+k-1}{2}\right]$ és (11) szerint a következő eredményhez jutunk:

$$[G_n]_k \equiv [G_n^*]_k \equiv \binom{\left[\frac{n+k-1}{2}\right]}{k} \pmod{2}. \quad (13)$$

5. §.

Az \mathfrak{S}_n^m (másodfajú) STIRLING-féle számokat a differenciászámításban az x^n hatvány *faktoriálisok* szerint való átrendezésével, vagyis a következő azonossággal kapcsolatban vezetik be:²⁵

$$x^n = \mathfrak{S}_n^1 x + \mathfrak{S}_n^2 x(x-1) + \mathfrak{S}_n^3 x(x-1)(x-2) + \dots + \mathfrak{S}_n^n x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{k=1}^n \mathfrak{S}_n^k(x)_k,$$

ha rövidség kedvéért bevezetjük a differenciászámításban szokásos

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1) = (x)_k$$

²⁵ Ha u. i. nem élnénk ezzel a megszorítással, akkor közös kezdőpontú pályákat is tekintetbe vennénk, már pedig pályaösszegeken közös szögpont nélküli pályákat értünk.

²⁶ L. JORDAN, 168. l. (2).

jelölést. A felírt azonosság az \mathfrak{S}_n^m együtthatókat egyértelműen meghatározza, és pedig a (10b) képlet szerint. A G_n^* gráffal kapcsolatos jelöléssel (l. (10a)) ez az azonosság így írható:

$$x^n = \sum_{k=1}^n [G_n^*]_{n-k}(x)_k. \quad (14)$$

Ezt a képletet most kombinatorikai módszerrel bizonyítjuk be. Elegendő volna megmutatni, hogy ez az egyenlőség $n+1$ (egymástól különböző) x érték esetében teljesül. Az alábbiakban tetszésszerűen pozitív egész x számra igazoljuk a (14) érvényességét.

Tekintsünk x számú (egymástól az $1, 2, \dots, x$ sorszámokkal megkülönböztetett) osztályt, és osszuk be a G_n^* gráf szögpontjait minden lehetséges módon ezekbe az osztályokba (üresen maradó osztályokat is megengedve). Az összes beosztási lehetőségek száma: x^n . Tekintsük már most azokat a beosztásokat, amelyeknél pontosan k osztályba kerülnek szögpontok ($k=1, 2, \dots, n$). Ez a k osztály $\binom{x}{k}$ -féleképpen választható ki, s betöltésük $k!$ -féleképpen lehetséges, ha már előzőleg megállapodtunk abban, hogy mely szögpontok kerüljenek ugyanabba az osztályba, azaz a gráf szögpontjait k halmazba osztottuk. Mivel végül ez utóbbi lehetőségek száma a 4. § I. szerint $[G_n^*]_{n-k}$, a tekintetbevett «osztály-beosztások» száma összesen:

$$k! \binom{x}{k} [G_n^*]_{n-k} = [G_n^*]_{n-k}(x)_k,$$

úgyhogy a $k=1, 2, \dots, n$ esetekre vonatkozó összegezéssel valóban a (14) összefüggést nyerjük.

Kézenfekvő, hogy a (14)-nek megfelelően bevezessük a *tetszőlegesen irányított teljes G gráfhhoz tartozó*:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n [G]_{n-k}(x)_k = \sum_{i=1}^n b_i x^i \quad (15)$$

egész együtthatójú, n -edfokú polinomot. Ennek érdekes sajátága, hogy

$$f(1) = [G]_{n-1} = (G)$$

folytán: együtthatóinak összege a G gráf teljes pályáinak számát adja meg. x^n együtthatója: $b_n = [G]_0 = 1$. A többi együttható

viszont mindig páros szám.²⁷ Az $(x)_k$ függvényt ugyanis az ú. n. elsőfajú STIRLING-féle számok segítségével x hatványai szerint átrendezve:²⁸

$$(x)_k = S_k^1 x + S_k^2 x^2 + S_k^3 x^3 + \dots + S_k^k x^k \quad (S_k^k = 1),$$

a (15) révén a b_{n-l} együtthatót így írhatjuk fel:

$$b_{n-l} = S_n^{n-l} [G]_0 + S_{n-1}^{n-l} [G]_1 + S_{n-2}^{n-l} [G]_2 + \dots + S_{n-l}^{n-l} [G]_l. \quad (16)$$

Ugyanez az együttható (ha $l \geq 1$) a G^* gráfhoz tartozó (14) polinom esetében nyilván:

$$0 = S_n^{n-l} [G^*]_0 + S_{n-1}^{n-l} [G^*]_1 + S_{n-2}^{n-l} [G^*]_2 + \dots + S_{n-l}^{n-l} [G^*]_l.$$

Ezt az egyenletet a (16)-ból kivonva:

$$b_{n-l} = S_{n-2}^{n-l} ([G]_2 - [G^*]_2) + S_{n-3}^{n-l} ([G]_3 - [G^*]_3) + \dots + S_{n-l}^{n-l} ([G]_l - [G^*]_l),$$

ugyanis $[G]_0 = [G^*]_0$ és $[G]_1 = [G^*]_1$. Ebből a (11) tekintetbevételével kitűnik b_{n-l} páros volta. Az $l=2$ esetben pedig a (12) alapján azt az eredményt nyerjük, hogy b_{n-2} a G gráf ciklikus háromszögeinek kétszeres számával egyenlő:

$$b_{n-2} = 2c_3(G_n). \quad (16a)$$

Most megmutatjuk, hogy páratlan l esetén a b_{n-l} együttható mindig zérus. Ez nyilván egyenlőértékű azzal az állítással, hogy $f(x)$ az n fokszámmal egyező párosságú polinom, azaz hogy fennáll a következő azonosság:

$$f(x) = (-1)^n f(-x). \quad (17)$$

Ezt elegendő volna az $x=1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]-1$ értékek esetében igazolni, s ilyen módon ez az azonosság le is vezethető a (7) és (9) egyenletrendszerekből; a fáradságos számítás elkerülésére azonban inkább az alábbi, kombinatorikai jellegű bizonyítást választjuk, amely a (17) érvényességét mindjárt tetszésszerűn pozitív egész x érték esetében mutatja.

²⁷ Mégpedig sejtésünk szerint nem negatív páros szám.

²⁸ L. JORDAN, 143. l. (3). — Az első fajú STIRLING-féle számok között (szemben a másodfajúakkal) negatívok is vannak. Mindkétfajú STIRLING-féle számok értékét feltüntető táblázatok is találhatók az idézett könyvben.

Tekintsünk ismét x számú (sorszámmal megkülönböztetett) osztályt. Ekkor a

$$[G]_{n-k}(x)_k = k! \binom{x}{k} [G]_{n-k}$$

számnak ugyanazzal a meggondolással adhatunk kombinatorikai értelmezést, mint amellyel fentebb a megfelelő kifejezést a G^* gráf esetében értelmeztük; csak azt az eltérést kell tekintetbe vennünk, amely a 4. § II. szerint a $[G^*]_{n-k}$, illetve $[G]_{n-k}$ szám kombinatorikai értelmezése közt van. E szerint $[G]_{n-k}$ ama lehetőségek száma, ahányféleképpen a G gráf szögpontjait k halmazba beoszthatjuk úgy, hogy az egyes halmazokon belül a szögpontok rendezett variációt alkossanak. Ennek megfelelően $f(x)$ mindama lehetőségek száma, ahányféleképpen a G gráf szögpontjait az x osztályba *rendezetten* beoszthatjuk.

Most a $(-1)^n f(-x)$ kifejezés számára keresünk kombinatorikai értelmezést. Mivel: $(-x)_k = (-1)^k (x+k-1)_k$, ez a kifejezés így is írható:

$$\begin{aligned} (-1)^n f(-x) &= (-1)^n \sum_{k=1}^n (-1)^k [G]_{n-k}(x+k-1)_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [G]_k (x+n-1-k)_{n-k}. \end{aligned}$$

Ebből

$$(x-1)! (-1)^n f(-x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n+x-1-k)! [G]_k.$$

Ezt az összefüggést az (5)-tel egybevetve látjuk, hogy a jobb-oldalon álló kifejezés egy részben irányított gráf teljes pályáinak számát adja meg. Ezt a \mathfrak{G} gráfot G -ből a következő «bővítéssel» nyerjük: a G gráf A_1, A_2, \dots, A_n szögpontjaihoz hozzávesszük a B_1, B_2, \dots, B_{x-1} szögpontokat, s minden AB , illetve BB szögpontpárt egy *irányítás nélküli* éllel kötünk össze. Mivel az így nyert $n+x-1$ szögpontú teljes gráf irányított éleinek halmaza G , a teljes pályák számát az (5) szerint számítva ($[G]_n = [G]_{n+1} = \dots = [G]_{n+x-2} = 0$ folytán) valóban a fenti kifejezést kapjuk, úgyhogy

$$(-1)^n f(-x) = \frac{(\mathfrak{G})}{(x-1)!}.$$

Itt pedig a jobboldalon a \mathfrak{G} gráf olyan teljes pályáinak száma áll, amelyek mentén a B pontok *egy meghatározott*, (pl. B_1, B_2, \dots, B_{x-1}) sorrendben következnek. Az ilyen teljes pályákból ugyanis az összes többi a B pontok (egymásközti) permutálásával nyerhető, mert az AB , illetve BB élek nincsenek irányítva, úgyhogy a B pontok felcserélésével teljes pálya ismét teljes pályába megy át.

E kiválasztott teljes pályák mármost kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozhatók ama rendezett beosztásokkal, melyek számával $f(x)$ -et értelmeztük. Minden ilyen teljes pálya ugyanis az A_1, A_2, \dots, A_n szögpontokat x osztályba sorozza a szerint, hogy valamely A pont a B_1 elébe, vagy a B_1 és B_2 közé, ... s. i. t. jut. Viszont az A pontoknak ezekbe az «osztályokba» való minden beosztásából alkothatunk teljes pályát \mathfrak{G} -ben, és pedig annyit, ahányféleképpen az ugyanazon osztályba kerülő A pontokból rendezett variációkat alkothatunk. Ezzel a (17) érvényességét bármely pozitív egész x szám esetében igazoltuk.

A (17) azonosság következtében a b_{n-l} együtthatók páratlan l esetén eltűnnek. A (16) alapján tehát a következő egyenlet-rendszert írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} S_n^{n-1} [G]_0 + S_{n-1}^{n-1} [G]_1 &= 0, \\ S_n^{n-2} [G]_0 + S_{n-1}^{n-3} [G]_1 + S_{n-2}^{n-3} [G]_2 + S_{n-3}^{n-3} [G]_3 &= 0, \\ S_n^{n-5} [G]_0 + S_{n-1}^{n-5} [G]_1 + S_{n-2}^{n-5} [G]_2 + S_{n-3}^{n-5} [G]_3 + S_{n-4}^{n-5} [G]_4 + \\ &\quad + S_{n-5}^{n-5} [G]_5 = 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (18)$$

Ez világosabban mutatja a $[G]_k$ számok közti összefüggéseket, mint a (9), de meg lehet mutatni, hogy azzal egyenlő értékű. A (18) szerint pl. a $[G]_2, [G]_4, \dots$ számokból a $[G]_3, [G]_5, \dots$ számok kiszámíthatók.

6. §.

Jelöljük a rögzített n -hez tartozó valamennyi G_n irányított teljes gráf teljes pályái számának, (G_n) -nek, maximumát T_n -nel. Ebben a §-ban T_n -et törekszünk minél szűkebb korlátok közé szorítani.

Mindenekelőtt meghatározzuk a (G_n) számok középértékét; ez

$$K_n = \frac{\Sigma(G)_n}{2^{\binom{n}{2}}},$$

ahol az összegezés az n számú szögpontra bíró teljes gráf valamennyi lehetséges irányítására terjesztendő ki. Ugyanis ezeknek az irányításoknak a száma $2^{\binom{n}{2}}$, mert az $\binom{n}{2}$ számú él mindegyikét egymástól függetlenül kétféleképpen irányíthatjuk.

Az $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_n}$ teljes pálya azokhoz és csak azokhoz az irányításokhoz tartozó G_n gráfokban szerepel, amelyekben az $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_2 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$ élek ezzel az irányítással szerepelnek, míg a többi $\binom{n}{2} - (n-1)$ él irányítása tetszőleges. E G_n gráfok száma tehát $2^{\binom{n}{2} - (n-1)}$. Ugyanennyi G_n gráfban szerepel bármely másik szögpontpermutáció által meghatározott teljes pálya is; minthogy a szögpontpermutációk száma $n!$, az összes G_n gráfok teljes pályáinak száma

$$\Sigma(G_n) = 2^{\binom{n}{2} - (n-1)} n!,$$

tehát a kérdéses középérték:

$$K_n = \frac{n!}{2^{n-1}}.$$

Ebből nyilvánvalóan következik, hogy

$$T_n \geq \frac{n!}{2^{n-1}}. \quad (19)$$

A T_n felülről való megbecslése céljából tekintsünk egy adott módon irányított G_n gráfot s kérdezzük, hány olyan $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_n}$ szögpontpermutáció van, hogy $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_3 A_4}, \dots$ (utoljára $\overrightarrow{A_{n-1} A_n}$ vagy $\overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1}}$ a szerint, hogy n páros-e vagy páratlan) G_n -nek ilyen irányítású élei. Az ilyen szögpontpermutációkat $\rightarrow \dots \rightarrow \dots$ típusú szögpontpermutációknak nevezzük, számukat T'_n -vel jelöljük. Minthogy G_n minden teljes pályája is ilyen szögpontpermutációt határoz meg, azért $(G_n) \leq T'_n$.

Az $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_n} \rightarrow \dots \rightarrow \dots$ típusú szögpontpermutáció $\overrightarrow{A_1 A_2}$ éle tetszőlegesen választhatjuk G_n -nek $\binom{n}{2}$ számú éle közül. Hagyjuk el az A_1, A_2 szögpontokat és az őket tartalmazó éleket; kapunk egy $n-2$ szögpontú G_{n-2} irányított teljes gráfot. Az $\overrightarrow{A_3 A_4}$ élt tetszőlegesen választhatjuk G_{n-2} -nek $\binom{n-2}{2}$ számú éle

közül. Hasonlóan, $\overrightarrow{A_5 A_6}$ -ot tetszőlegesen választhatjuk annak a G_{n-4} gráfnak $\binom{n-4}{2}$ számú éle közül, amely G_{n-2} -ből A_3, A_4 és az őket tartalmazó élek elhagyásával keletkezik, s. i. t. E szerint

$$T'_n = \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \binom{n-4}{2} \dots = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{2} \dots = \frac{n!}{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}, \quad (20)$$

ugyanis az utolsó tényező páros n esetén $\frac{2 \cdot 1}{2}$, páratlan n esetén $\frac{3 \cdot 2}{2}$, úgyhogy a számlálóban minden esetben $n!$ van. Észrevesszük, hogy T'_n független G_n éleinek irányításától. $(G_n) \leq T'_n$ miatt $T_n \leq T'_n$, azaz

$$T_n \leq \frac{n!}{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}, \quad (21)$$

ahonnan

$$\lim \frac{T_n}{n!} = 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A (19) és (21) egyenlőtlenséget összefoglalva

$$\frac{n!}{2^{n-1}} \leq T_n \leq \frac{n!}{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} < \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}-1}},$$

azaz

$$\frac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}},$$

tehát

$$\liminf \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \geq \frac{1}{2}, \quad \limsup \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}. \quad (22)$$

Felmerül az a kérdés, van-e $\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ -nak határértéke és mi ez a határérték. A kérdés első felére tudunk válaszolni, bebizonyítjuk, hogy

$$\lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} = l$$

létezik; a kérdés második felére vonatkozóan az a sejtésünk, hogy $l = \frac{1}{2}$.

Az l határérték létezését a (21) becslés általánosításával mutatjuk meg. Legyen $k < n$; tekintsük a $\xrightarrow{k-1 \text{ él}} \dots \xrightarrow{k-1 \text{ él}} \dots$

típusú $A_1 A_2 \dots A_n$ szögpontpermutációkat, vagyis azokat, amelyekben $A_1 A_2 \dots A_k, A_{k+1} A_{k+2} \dots A_{2k}, \dots$ (utoljára, ha $n = qk + r$,

$0 \leq r < k$, $A_{(q-1)k+1} A_{(q-1)k+2} \dots A_{qk}$) G_n -nek pályái. E szögpontpermutációk száma már nem lesz független G_n élei irányításától, úgyhogy a (20) képletet nem tudjuk általánosítani, de a (21) egyenlőtlenséget igen. Ugyanis az A_1, A_2, \dots, A_k szögpontok összességét $\binom{n}{k}$ -féleképpen választhatjuk ki G_n szögpontjai közül, sorrendjüket pedig egy-egy választásuk esetén annyiféleképpen, ahány teljes pályája van az általuk meghatározott G_k teljes gráfnak, azaz legfeljebb T_k -féleképpen. Hasonlóan az $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{2k}$ szögpontok összességét $\binom{n-k}{k}$ -féleképpen választhatjuk ki annak a G_{n-k} gráfnak a szögpontjai közül, amely G_n -ből A_1, A_2, \dots, A_k és az őket tartalmazó élek elhagyásával keletkezik, sorrendjüket pedig ismét legfeljebb T_k -féleképpen, s. i. t. az $A_{(q-1)k+1}, A_{(q-1)k+2}, \dots, A_{qk}$ szögpontokig; végül a megmaradt r számú $A_{qk+1}, A_{qk+2}, \dots, A_n$ szögpontok sorrendjét legfeljebb $r!$ -féleképpen választhatjuk. E szerint a tekintett szögpontpermutációk száma legfeljebb

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} T_k \binom{n-k}{k} T_k \dots \binom{n-(q-1)k}{k} T_k r! = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{(n-k)(n-k-1) \dots (n-2k+1)}{k!} \dots \\ & \dots \frac{(n-(q-1)k)(n-(q-1)k-1) \dots (r+1)}{k!} T_k^q r! = \\ &= \frac{n!}{k!^q} T_k^q = n! \left(\frac{T_k}{k!} \right)^q, \end{aligned}$$

s mivel a G_n teljes pályái által meghatározott szögpont-

permutációk mind előfordulnak ezek között, s $q = \left[\frac{n}{k} \right]$, kapjuk, hogy²⁹

$$T_n \leq n! \left(\frac{T_k}{k!} \right)^{\left[\frac{n}{k} \right]}. \quad (23)$$

Észrevevesszük, hogy ez tényleg általánosítása (21)-nek, mégpedig (21) a (23)-nak $k=2$ esete.

Minthogy $T_k \leq k!$ és $\left[\frac{n}{k} \right] > \frac{n}{k} - 1$, adódik innét, hogy

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n!} &< \left(\frac{T_k}{k!} \right)^{\frac{n}{k}-1} = \frac{k!}{T_k} \left(\frac{T_k}{k!} \right)^{\frac{n}{k}}, \\ \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} &< \sqrt[n]{\frac{k!}{T_k}} \sqrt[k]{\frac{T_k}{k!}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Mivel rögzített k esetén $\sqrt[n]{\frac{k!}{T_k}} \rightarrow 1$, azért bármilyen pozitív ε -ra és elég nagy $n = n(\varepsilon)$ -ra

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leq \sqrt[k]{\frac{T_k}{k!}} + \varepsilon. \quad (25)$$

Az $\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ sorozatnak ezt a tulajdonságát úgy fejezhetjük ki, hogy «majdnem monoton csökkenő». Ha ugyanis minden n -re (valahányszor $n > k$) $\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leq \sqrt[k]{\frac{T_k}{k!}}$ adódott volna, akkor $\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ monoton csökkenő lenne; az egyenlőtlenség azonban csak akkor áll, ha a jobboldalt ε -nal növeljük, s ekkor is csak elég nagy n -re. E tulajdonságból azonban hasonló módon következik $\lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ létezése, mint ha $\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$ monoton fogyna.

²⁹ Hasonló megfontolással kapjuk, hogy azoknak az $A_1 A_2 \dots A_n$ szög-pontpermutációknak száma, amelyekben $A_1 A_2 \dots A_k$ és $A_{k+1} A_{k+2} \dots A_n$ pályái G_n -nek, legfeljebb $\binom{n}{k} T_k T_{n-k}$, tehát

$$T_n \leq \binom{n}{k} T_k T_{n-k}, \quad \frac{T_n}{n!} \leq \frac{T_k}{k!} \frac{T_{n-k}}{(n-k)!}.$$

A (23) egyenlőtlenség ennek az egyenlőtlenségnek ismételt alkalmazásával is adódik.

Legyen ugyanis a

$$\frac{T_1}{1!}, \sqrt{\frac{T_2}{2!}}, \sqrt[3]{\frac{T_3}{3!}}, \dots, \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}, \dots$$

pozitív számok alsó határa l és legyen $\varepsilon > 0$. Akkor egyrészt minden n -re

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \geq l,$$

másrészt van olyan k , hogy

$$\sqrt[k]{\frac{T_k}{k!}} < l + \varepsilon.$$

Ha tehát n elég nagy, akkor (25) miatt

$$l \leq \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < l + 2\varepsilon,$$

azaz

$$\lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} = l.$$

A (22) egyenlőtlenségek folytán

$$\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

További felső korlátokat kaphatunk l számára a (23) egyenlőtlenségből. Ha $k=2$, ez a (21) egyenlőtlenségbe megy át. Ha $k=3$, akkor $T_3=3$ miatt (23) azt adja, hogy

$$T_n \leq \frac{n!}{2^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}};$$

ez durvább, mint a (21) egyenlőtlenség. Azonban a (21)-nél jobb egyenlőtlenség is ebből l számára fenténél jobb felső korlát fog előállni azáltal, hogy az imént végzett megbecslésnek a $k=3$ esetet illető részét a következő módon finomítjuk (v. ö. ³¹).

A G_n gráf egy $\rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \dots$ típusú $A_1 A_2 \dots A_n$ szögpont-permutációjának első három szögpontját $\binom{n}{3}$ -féleképpen választhatjuk; sorrendjüket azonban a szerint választhatjuk háromféle-

képpen, vagy egyféleképpen, hogy ez a három szögpont ciklikus, vagy tranzitív háromszöget alkot-e. E szerint az $\overrightarrow{A_1 A_2 A_3}$ pályát

$$3c_3(G_n) + t_3(G_n) = 3 \binom{n}{3} - 2t_3(G_n)$$

számú módon választhatjuk, ahol $t_3(G_n)$ és $c_3(G_n) = \binom{n}{3} - t_3(G_n)$ (mint eddig is) a G_n gráf tranzitív, illetőleg ciklikus háromszögeinek a számát jelenti. Meg fogjuk határozni $t_3(G_n)$ minimumát.

Tranzitív háromszögnek *kezdőpontján* értjük azt az egyértelműen meghatározott szögpontját, amelyből mindkét másik szögpontjába indul el. Ha G_n valamely szögpontjából e számú el indul kifelé, akkor e szögpont $\binom{e}{2}$ számú tranzitív háromszög kezdőpontja; ugyanis a tranzitív háromszög másik két szögpontját tetszőlegesen választhatjuk azon e számú szögpont közül, amelyekbe a kezdőpontból indul el. Ha tehát a G_n gráf A_1, A_2, \dots, A_n szögpontjaiból rendre e_1, e_2, \dots, e_n el indul kifelé, akkor

$$t_3(G_n) = \binom{e_1}{2} + \binom{e_2}{2} + \dots + \binom{e_n}{2} = \frac{1}{2} \left(e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 - \left(\frac{n}{2} \right) \right), \quad (26)$$

mert

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (27)$$

(G_n összes éleinek száma).

Az $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2$ a (27) mellékfeltétel mellett csak véges számú értéket vehet fel; ezek között van legkisebb. Ez a legkisebb érték csak olyan e_1, e_2, \dots, e_n értékek mellett érhető el, amelyek vagy mind egyenlők, vagy pedig kétféle értéket vesznek fel, s ezek különbsége 1. Ha ugyanis volna kettő, amelyek különbsége 1-nél nagyobb, például $e_1 - e_2 > 1$, akkor e_1 -et 1-gyel csökkentve, e_2 -t pedig 1-gyel növelve, továbbra is fennállana a (27) mellékfeltétel, azonban

$$\begin{aligned} & (e_1 - 1)^2 + (e_2 + 1)^2 + e_3^2 + \dots + e_n^2 = \\ & = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_n^2 - 2(e_1 - e_2 - 1) < e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_n^2 \end{aligned}$$

volna, azaz $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2$ nem lehetne minimum.

Írjuk a (27) feltételt

$$\left(e_1 - \frac{n-1}{2}\right) + \left(e_2 - \frac{n-1}{2}\right) + \dots + \left(e_n - \frac{n-1}{2}\right) = 0 \quad (27')$$

alakban. Ha n páratlan, akkor minden tag egész szám, tehát vagy minden tag 0, azaz minden $e_i = \frac{n-1}{2}$, vagy van pozitív

és negatív tag is: $e_i - \frac{n-1}{2} \geq 1$, $e_j - \frac{n-1}{2} \leq -1$; de akkor $e_i - e_j \geq 2$, tehát az utóbbi esetben $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2$ nem lehet minimum. Azaz a minimum az $e_1 = e_2 = \dots = e_n = \frac{n-1}{2}$ érték-rendszernél áll be; ekkor

$$e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 = n \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Ha n páros, akkor (27') tagjai nem egész számok, hanem $m + \frac{1}{2}$ alakúak, ahol m egész szám; tehát vagy a tagok fele $+\frac{1}{2}$, másik fele $-\frac{1}{2}$, vagy van $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb, illetőleg $-\frac{1}{2}$ -nél kisebb tag is. Az utóbbi esetben van két olyan tag, tehát két oly e_i is, amelyek különbsége nagyobb 1-nél, tehát $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2$ nem lehet minimum. Most tehát a minimum:

$$\begin{aligned} e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 &= \\ &= \frac{n}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{n}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n(n^2 - 2n + 2)}{4}. \end{aligned}$$

E szerint

$$e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 \geq \begin{cases} \frac{n(n-1)^2}{4}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n(n^2 - 2n + 2)}{4}, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases}$$

tehát (26) miatt³⁰

³⁰ A fenti megfontolásból még nem következik, hogy a jobboldal $t_3(G_n)$ minimumát adja; ehhez még meg kell mutatni, hogy van olyan G_n gráf, amelyben páratlan n esetén $e_1 = e_2 = \dots = e_n = \frac{n-1}{2}$, illetőleg páros n esetén $e_1 = e_2 = \dots = e_n = \frac{n}{2}$, $e_{\frac{n}{2}+1} = e_{\frac{n}{2}+2} = \dots = e_n = \frac{n}{2} - 1$. Ilyen gráfokat könnyű volna megadni; azonban a továbbiakban nincs szükségünk arra, hogy az egyenlőség elérhető.

$$\cong \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{n(n^2-2n+2)}{4} - \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n(n-2)^2}{8}, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases}$$

innen

$$\begin{aligned} c_3(G_n) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - t_3(G_n) \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{n(n-1)}{24} (4n-8-3n+9) = \frac{(n+1)n(n-1)}{24}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n(n-2)}{24} (4n-4-3n+6) = \frac{(n+2)n(n-2)}{24}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases} \quad (28) \end{aligned}$$

Végül a G_n gráf kétélű pályáinak száma

$$\begin{aligned} &3 \binom{n}{3} - 2t_3(G_n) \leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{n(n-1)}{4} (2n-4-n+3) = \frac{n(n-1)^2}{4} = n \frac{n-1}{2} \frac{n-1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n(n-2)}{4} (2n-2-n+2) = \frac{n^2(n-2)}{4} = n \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right), & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases} \end{aligned}$$

azaz egyöntetű jelöléssel

$$3 \binom{n}{3} - 2t_3(G_n) \leq n \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right]. \quad (28')$$

Legfeljebb ennyiféleképpen választhatjuk az $A_1 A_2 \dots A_n$ $\rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \dots$ típusú szögpontpermutáció $\overrightarrow{A_1 A_2 A_3}$ pályáját; az $\overrightarrow{A_4 A_5 A_6}$ pályát hasonlóan legfeljebb $(n-3) \left[\frac{n-3}{2} \right] \left[\frac{n-4}{2} \right]$ -féleképpen, s. i. t. az $\overrightarrow{A_{n-2} A_{n-1} A_n}$, vagy $\overrightarrow{A_{n-3} A_{n-2} A_{n-1}}$, vagy $\overrightarrow{A_{n-4} A_{n-3} A_{n-2}}$ pályáig, a szerint, hogy n $3q$, vagy $3q+1$, vagy $3q+2$ alakú. Az első esetben minden szögpont meg van határozva, a második esetben A_n -et csak egyféleképp választhatjuk, a harmadik esetben pedig az A_{n-1} és A_n szögpontokat kétféle sorrendben írhatjuk a szögpontpermutáció végére. E szerint a kívánt $A_1 A_2 \dots A_n$ szögpontpermutációk száma legfeljebb

$$T_n'' = n \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right] (n-3) \left[\frac{n-3}{2} \right] \left[\frac{n-4}{2} \right] (n-6) \left[\frac{n-6}{2} \right] \left[\frac{n-7}{2} \right] \dots$$

Itt az utolsó tényezők $n = 3q$ esetén $3 \cdot \left[\frac{3}{2} \right] \cdot \left[\frac{2}{2} \right]$, $n = 3q + 1$ esetén $4 \cdot \left[\frac{4}{2} \right] \cdot \left[\frac{3}{2} \right]$, $n = 3q + 2$ esetén pedig $5 \cdot \left[\frac{5}{2} \right] \cdot \left[\frac{4}{2} \right] \cdot 2$. Így tehát

$$\begin{aligned} T_n &\leq T_n'' \leq n \frac{n}{2} \frac{n-1}{2} (n-3) \frac{n-3}{2} \frac{n-4}{2} (n-6) \frac{n-6}{2} \frac{n-7}{2} \dots < \\ &< n \frac{n}{2} \frac{n-1}{2} (n-2) \frac{n-3}{2} \frac{n-4}{2} (n-5) \frac{n-6}{2} \frac{n-7}{2} \dots \leq \\ &\leq \frac{n \cdot n!}{2^{\frac{2}{3} \left[\frac{n}{3} \right]}} < \frac{n \cdot n!}{2^{\frac{2}{3} n-2}}, \end{aligned}$$

úgyhogy végül ³¹

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < \frac{\sqrt[n]{4n}}{2^{\frac{2}{3}}}, \quad l = \lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leq \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}.$$

A $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$ típusú szögpontpermutációknak hasonló vizsgálatából még élesebb egyenlőtlenségre jutunk. Mindekenelőtt jegyezzük meg, hogy négy szögpontú G_4 gráfra

$$(G_4) = 1 + 2c_3(G_4). \quad (29)$$

Ugyanis ³² $n=4$ esetén a (15) egyenlőség — az 5. § eredményeinek figyelembevételével — a következőbe megy át:

$$\begin{aligned} [G_4]_3 x + [G_4]_2 x(x-1) + [G_4]_1 x(x-1)(x-2) + \\ + x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 + 2c_3(G_4)x^2, \end{aligned}$$

ahonnan x helyébe 1-et helyettesítve kapjuk (29)-et. Alkalmazzuk most (29)-et valamely G_n irányított teljes gráf vala-

³¹ Az $l \leq \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$ egyenlőtlenség (24)-ből is adódik, ha k helyébe 6-ot teszünk; ugyanis $T_6 = 45$, tehát $\sqrt[6]{\frac{T_6}{6!}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$. Azonban $T_6 = 45$ csak hosszas számítással (valamennyi hatodrendű teljes gráf megvizsgálásával) adódik; a mellett a fent alkalmazott megfontolás magában véve is érdekes és általánosításra alkalmasnak látszik.

³² A (29) képlet természetesen közvetlenül is adódik, ha valamennyi (lényegében háromféle) négyszögpontú teljes gráfot megvizsgáljuk.

mennyi négyszögpontú teljes részgráfjára; ezeknek száma $\binom{n}{4}$. G_n egy-egy ciklikus háromszöge $n-3$ ilyen négyszögpontú részgráfban szerepel; t. i. a negyedik szögpont a G_n gráf bármelyik szögpontja lehet, kivéve persze a ciklikus háromszög három szögpontját. Összegezve G_n valamennyi négyszögpontú teljes részgráfjára, kapjuk (29)-ből, hogy G_n háromélű pályáinak száma

$$\binom{n}{4} + 2(n-3)c_3(G_n).$$

A (28) egyenlőtlenséget figyelembevéve, adódik

$$\begin{aligned} & \binom{n}{4} + 2(n-3)c_3(G_n) \leq \\ \leq & \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-3)}{24}(n-2+2n+2) = \frac{n^2(n-1)(n-3)}{8}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{n(n-2)(n-3)}{24}(n-1+2n+4) = \frac{(n+1)n(n-2)(n-3)}{8}, & \text{ha } n \text{ páros;} \end{cases} \end{aligned}$$

legfeljebb ennyiféleképpen választhatjuk az $A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$
 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$ típusú szögpontpermutáció $A_1 A_2 A_3 A_4$ pályáját. Az
 $A_5 A_6 A_7 A_8$ pályát hasonlóan legfeljebb $\frac{(n-4)^2(n-5)(n-7)}{8}$,
 ill. $\frac{(n-3)(n-4)(n-6)(n-7)}{8}$ -féleképpen választhatjuk, a sze-

rint, hogy n páratlan vagy páros, s. i. t. az $A_{4q-3} A_{4q-2} A_{4q-1} A_{4q}$
 pályáig, ahol $n=4q+r$, $0 \leq r < 4$; az $r=0$ esetben ezzel be is
 fejeződik a szögpontpermutáció, az $r=1$ esetben a hiányzó A_n
 szögpont egyértelműen meg van határozva, az $r=2$ esetben A_{n-1} -et
 és A_n -et kétféle, végül az $r=3$ esetben A_{n-2} -t, A_{n-1} -et és A_n -et
 hatféle sorrendben írhatjuk a végére. E szerint legfeljebb

$$T_n''' = \begin{cases} \frac{n^2(n-1)(n-3)}{8} - \frac{(n-4)^2(n-5)(n-7)}{8} \dots, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \frac{(n-8)^2(n-9)(n-11)}{8} \dots, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$ típusú szögpontpermutáció van; az utolsó tényező $n=4q$ esetén $\frac{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{8}$, $n=4q+1$ esetén $\frac{5^3 \cdot 4 \cdot 2}{8}$, $n=4q+2$ esetén $\frac{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{8} \cdot 2$, $n=4q+3$ esetén pedig $\frac{7^2 \cdot 6 \cdot 4}{8} \cdot 3!$.

Mindenesetre

$$T_n \leq T_n''' \leq \frac{(n+1)n!}{8^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}} < \frac{(n+1)n!}{2^{\frac{3}{4}n-3}},$$

és így végül:

$$\sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} < \frac{\sqrt[n]{8(n+1)}}{2^{\frac{3}{4}}}, \quad l = \lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}.$$

Azt lehet sejtteni, hogy a $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$ típusú szögpontpermutációk vizsgálatából $l \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$ adódik stb. Ehhez azonban egyrészt a (29) képlet általánosítására, másrészt (mint-hogy ebben az általánosításban valószínűleg fellép majd a G_n gráf ciklikus öt-, hét- stb. szögeinek száma, sőt, több ciklikus sokszögből összetett «ciklikus alakzatainak» száma is) a (28) egyenlőtlenség általánosítására van szükség; ezeket azonban eddig nem sikerült bebizonyítanom. Már az eddig elvégzett becslések is valószínűvé teszik a már említett következő *sejtést*:

$$l = \lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}} = \frac{1}{2}.$$

Az alábbi táblázatban feljegyezzük még $3 \leq n \leq 7$ mellett T_n -nek, valamint a fentebb bevezetett K_n középértéknek, mint alsó korlátnak és a T_n' , T_n'' , T_n''' felső korlátoknak értékeit:

n	T_n	K_n	T_n'	T_n''	T_n'''
3	3	1.5	3	3	6
4	5	3	6	8	5
5	15	7.5	30	40	25
6	45	22.5	90	108	126
7	189	78.75	630	504	882.

★

Végül hálás köszönetemet fejezem ki dr. RÉDEI LÁSZLÓ egyetemi ny. r. tanár úrnak, aki a dolgozatban tárgyalt kérdésekre a figyelmemet felhívta és munkámban értékes megjegyzéseivel támogatott, továbbá dr. KALMÁR LÁSZLÓ egyetemi magántanár úrnak, aki szíves útbaigazításaival a dolgozat elkészítésében nagy mértékben segítségemre volt.

★

Utólagos megjegyzés a korrektúraolvasás alkalmával.
A G_n gráf kétélű pályáinak maximális számára megállapított (28') eredményhez lényegesen egyszerűbb módon is eljuthatunk a következő megfontolással. Tekintsük azokat a kétélű pályákat, melyeknek «középső» szögpontja G_n egyik kiszemelt szögpontja. Minden ilyen pálya egy, az illető szögpontba befutó és egy onnan kiinduló élből áll. Ha tehát a kiszemelt szögpontból e_k számú él indul ki, s ugyanoda e_b számú él fut be, a tekintetbevett kétélű pályák száma $e_b \cdot e_k$. Mivel pedig $e_b + e_k = n - 1$, az $e_b \cdot e_k$ szorzat értéke páratlan n esetében legfeljebb $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, páros n esetében legfeljebb $\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right)$. Végül, minthogy ugyanezt a felső határt kapjuk ama kétélű pályák számára, melyeknek középső szögpontja G_n egy másik szögpontja, ebből azonnal a (28') adódik.

Ezt az egyszerű módszert nem sikerült általánosítanom a k élű pályák maximális számának meghatározására, ha $k > 2$. Így a háromélű pályák számának maximumát továbbra is csak a (28) és (29) alapján tudom kiszámítani.

Szele Tibor.

KOMBINATORISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN GERICHTETEN VOLLSTÄNDIGEN GRAPHEN.

Ist in einem (endlichen) gerichteten Graphen G jedes Paar A, B der Knotenpunkte entweder durch eine Kante \overrightarrow{AB} oder durch eine Kante \overrightarrow{BA} verbunden, so heisst G ein *gerichteter vollständiger Graph*. Eine Folge A_1, A_2, \dots, A_k von verschiedenen Knotenpunkten des Graphen G heisst eine *Bahn* von G , falls $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_2 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_{k-1} A_k}$ Kanten von G sind. Der Inbegriff von Bahnen ohne gemeinsame Knotenpunkte heisst eine *Bahnensumme* von G . Nach einem Satz von RÉDEI¹ gibt es stets wenigstens eine *vollständige Bahn* von G , d. h. eine Bahn, die sämtliche Knotenpunkte von G enthält, und zwar ist die Anzahl (G) der vollständigen Bahnen von G stets ungerade. In § 2 wird dieser Satz durch eine neue Methode bewiesen.

Es bezeichne $(G)_k$ die Anzahl derjenigen Knotenpunktpermutationen $A_1 A_2 \dots A_n$, für welche genau k der Kanten $\overrightarrow{A_2 A_1}, \overrightarrow{A_3 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n A_{n-1}}$ Kanten von G sind. In § 3 wird $(G)_k \equiv \binom{n-1}{k} \pmod{2}$ bewiesen. Es bezeichne $[G]_k$ die Anzahl der Bahnensummen von G , die aus k Kanten bestehen. In § 4 wird $[G]_k \equiv \binom{r}{k} \pmod{2}$ mit $r = \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor$ bewiesen. Beide Sätze enthalten (für $k=0$ bzw. für $k=n-1$) den RÉDEI'schen Satz als Spezialfall.

In § 1 wird der Fall diskutiert, wo der Graph G transitiv ist (d. h. mit \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{BC} stets auch die Kante \overrightarrow{AC} enthält). Der transitive vollständige Graph G^* spielt auch in § 2 eine Rolle, indem dort der RÉDEI'sche Satz durch Zurückführung auf den Fall $G=G^*$ (wo offenbar $(G)=1$ ist) bewiesen wird. Die Zahl $(G^*)_k$ hängt mit einem SCHRUTKA'schen Satz¹⁹ über Permutationen zusammen, der hier mit graphentheoretischen Methoden gewonnen wird. Die Zahlen $[G^*]_k$ liefern eine graphentheoretische Deutung der STIRLING'schen Zahlen (zweiter Gattung).

In § 5 wird das Polynom

$$f(x) = \sum_{k=1}^n [G]_{n-k}(x)_k = \sum_{k=1}^n [G]_{n-k} x(x-1)\dots(x-k+1)$$

diskutiert; für $G=G^*$ ist $f(x)=x^n$ (n = Anzahl der Knotenpunkte von G). Mit Hilfe von $f(x)$ gewinnt man einen Einblick in die Abhängigkeit der Zahlen $[G]_k$.

Endlich wird in § 6 für das Maximum T_n von (G) für sämtliche gerichtete vollständige Graphen mit n Knotenpunkten die Existenz von

$$l = \lim \sqrt[n]{\frac{T_n}{n!}}$$

für $n \rightarrow \infty$, sowie die Ungleichung $\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$ bewiesen. Vermutlich gilt $l = \frac{1}{2}$.

Tibor Szele.

A PERMUTÁCIÓK PROFILJÁRÓL.*

ANDRÉ¹ nyomán SCHRUTKA² bevezette a permutációk részére az úgynevezett *profil* fogalmát a következő értelmezéssel. Tekintsük n számú különböző elemnek valamely

$$A = a_1 \dots a_n \quad (1)$$

permutációját. Ebben a szomszédos a_i, a_{i+1} ($i=1, \dots, n-1$) elemek közé írjunk \rightarrow vagy \leftarrow jelet a szerint, amint ez az elem-pár nincs inverzióban vagy inverzióban van. A \rightarrow, \leftarrow jeleknek így előálló

$$II = \pi_1 \dots \pi_p \quad (p=n-1) \quad (2)$$

sorozatot az A permutáció profiljának nevezzük. (SCHRUTKA a \rightarrow, \leftarrow jelek helyett $/, \backslash$ jeleket használ, s megfelelőleg «emelkedésről» és «súlyedésről» beszél; ugyancsak alkalmazza a 0, 1 jeleket, ami által a profil diadikus számmal adható meg.) Ha $p=0$, akkor a profil az «üres» sorozat, jele: $II=0$. Világos, hogy n számú elem permutációi profiljaik szerint 2^{n-1} számú különböző osztályba sorolhatók. Jelöljük $N(II)$ -vel a II profilú permutációk számát. Könnyű látni, hogy $N(II)$ nem változik, ha II elemeit fordított sorrendben írjuk, vagy ha II minden egyes eleme helyett a fordított elemet tesszük. Jegyezzük meg, hogy $N(\rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow) = N(\leftarrow \leftarrow \dots \leftarrow) = 1$, s különösen $N(0) = 1$.

* A szerző, WALDAPFEL LÁSZLÓ okleveles középiskolai tanár honvédelmi munkaszolgálatára teljesítése közben a keleti fronton 1942. dec. 11.-én 31 éves korában elesett. Lapunknak beküldött első és egyben utolsó dolgozatát RÉDEI LÁSZLÓ volt szíves az itt következő végleges alakra átírni. Szerk.

¹ D. ANDRÉ, Journ. d. math. (3) 7 (1881), 167–184. L. ehhez még E. NETTO, Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig, 1901, 60–63. §.

² L. v. SCHRUTKA, Eine neue Einteilung der Permutationen. Math. Ann. 118 (1941), 246–250.

SCHRUTKA² megoldja azt a kérdést, hogy n elemnek hány olyan permutációja van, amelyek profiljában a \rightarrow jelek száma (s így egyben a \leftarrow jelek száma is) adott, de a profilt magát figyelmen kívül hagyja. ANDRÉ¹ meghatározza az $N(\Pi)$ -t a

$$\Pi = \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \dots \quad (3)$$

különös esetben (a megfelelő permutációkat alternálóknak nevezi).

Mi az $N(\Pi)$ számossággal az általános esetben foglalkozunk, mégpedig számára megállapítunk egy egyszerű rekurzív képletet [1. az alábbi (6)-ot].

Céljainkhoz tekintsük a Π profilt előre adotttnak, s vegyük ezt fel ismét a (2) alakban. Akkor p a Π elemeinek a száma, míg a tekintetbe jövő permutációk elemszáma $n=p+1$. Elég lesz a $p \geq 1$ esetet tekinteni. Az (1) permutációból és a (2) profilból összeállítjuk az

$$(A\Pi) = a_1\pi_1 \dots a_{i-1}\pi_{i-1}a_i\pi_i a_{i+1} \dots \pi_p a_{p+1} \quad (4)$$

sorozatot. Azt fogjuk mondani, hogy az a_i *ütközőpontban* van, ha a (4)-ben csak olyan szomszédos eleme van, ami (t. i. az illető nyíl) feléje mutat; magát azt a helyet, ahol egy ilyen a_i áll, *ütközőpontnak* nevezzük. Utóbbiak kizárólag a Π profiltól függenek; a számuk legyen r , ami tehát biztosan ≥ 1 . Ezeknek megvilágítására szolgáljon a következő példa:

$$\bullet \leftarrow \leftarrow \rightarrow \bullet \leftarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \bullet \leftarrow \leftarrow \rightarrow \bullet, \quad (5)$$

ahol feltüntettük a Π elemeit, és az ütközőpontokat „ \bullet ” ponttal megjelöltük; ebben a példában $p=10$, $r=4$. Általában a k -dik ütközőpontot előzze meg a Π -nek p_k számú tagja. Nevezzük a k -dik ütközőpont *környezetének* a szomszédos π_i -k halmazát, ami tehát egy vagy két elemből áll. Végül a Π -nek a k -dik ütközőpont környezete előtt és után álló elemei a Π -nek egy-egy részsorozatát alkotják, amiket Π'_k -vel és Π''_k -vel jelölünk, s ezeket ismét profilokul tekintjük, elemszámaik összege $p-1$ vagy $p-2$. Természetesen Π'_1 és Π'_r lehetnek üresek, mint az (5) példában. Ezekután a fent bejelentett rekurzív képlet így szól:

$$N(\Pi) = \sum_{k=1}^r \binom{p}{p_k} N(\Pi'_k) N(\Pi''_k). \quad (6)$$

A bizonyítás előtt megjegyezzük, hogy ha különösen a Π -ben a \rightarrow , \leftarrow jelek nem keverednek, s az előbbiek száma $s(=0, 1, \dots, p)$, az utóbbiaké $t(=p-s)$, akkor egyszerűen

$$N(\Pi) = \binom{p}{s} \left[= \binom{p}{t} \right]. \quad (7)$$

Ugyanis most vagy $\Pi = \rightarrow \dots \rightarrow \leftarrow \dots \leftarrow$ (tehát $r=1$), s erre az esetre a (6) a fent tett megjegyzések szerint közvetlenül kiadja a (7)-et, vagy $\Pi = \leftarrow \dots \leftarrow \rightarrow \dots \rightarrow$, s ebben az esetben a Π elemeinek sorrendjét megfordítva, ismét előáll a (7). Az általános esetben is az $N(\Pi)$ -nek a (6) ismételt alkalmazásával való kiszámítása megkönnyíthető, ha e közben alkalom nyílik a (7) felhasználására. Például a $\Pi = \bullet \leftarrow \leftarrow \rightarrow \rightarrow \bullet \leftarrow \leftarrow$ esetben (6) [és $N(0)=1$] szerint:

$$N(\Pi) = N(\bullet \leftarrow \rightarrow \rightarrow \bullet \leftarrow \leftarrow) + \binom{6}{4} N(\leftarrow \leftarrow \rightarrow) N(\leftarrow).$$

A jobboldal első tagja:

$$N(\rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow) + \binom{5}{3} N(\leftarrow \rightarrow) N(\leftarrow).$$

Ezekből (7) szerint:

$$N(\Pi) = \binom{4}{2} + \binom{5}{3} \binom{2}{1} \binom{1}{1} + \binom{6}{4} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 71.$$

Ugyancsak még a (6) bizonyítása előtt alkalmazásként tekintsük ANDRÉ példáját, t. i. a (3) esetet. Most $N(\Pi)$ helyett röviden N_p -t írva, előáll

$$N_p = \sum \binom{p}{l} N_{l-1} N_{p-l-1}, \quad (8)$$

ahol l befutja az $1, \dots, p$ sorozat páratlan tagjait és (páratlan p esetében) $N_{-1}=1$ értendő (természetesen ugyancsak $N_0=N_1=1$). ANDRÉ¹ ebből a (8) képletből további érdekes megállapításokat is nyer.

Most már elvégezzük a (6) bizonyítását. Tekintsük ehhez a Π profilú A permutációkat, s egyben a megfelelő $(A\Pi)$ sorozatokat. Egyszerűség kedvéért feltehető, hogy a permutálandó elemek $1, \dots, n(=p+1)$. Minthogy az n előtte álló elemmel nem lehet inverzióban, ellenben bármely utána álló elemmel inverziót alkot,

azért biztos, hogy n csak ütközőpontban szerepelhet. Tegyük fel, hogy n a k -dik ütközőpontban van. Akkor előtte az A -nak pontosan p számú eleme áll (t. i. ugyanannyi, mint ahány eleme Π -nek van a k -dik ütközőpont előtt), s így ezek az elemek a hátralevő elemek közül $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ p_k \end{smallmatrix} \right] \left(\begin{smallmatrix} p \\ p_k \end{smallmatrix} \right)$ -féleképpen választhatók (eltekintve az elemek sorrendjétől), egyszersmind azonban kell, hogy ezek Π'_k profilú permutációt alkossanak, az n után álló $(n-1-p_k) = p-p_k$ számú elem pedig Π''_k profilú permutációt.

Fordítva, ha az $1, \dots, p (=n-1)$ elemek közül kiválasztunk p_k számút (ahol $k=1, \dots, r$), s ezeket Π'_k profilú permutációba rendezzük, s utánuk írjuk az n -t, végül még a hátralevő elemeket Π''_k profilú permutációba rendezve, akkor Π profilú permutáció áll elő. Ezekkel a (6)-ot bebizonyítottuk.

Waldapfel László.

Rédei László megjegyzése a fenti dolgozathoz. Permutálandó elemekként szerepeljenek egy $n(=p+1)$ -szögpontú irányított teljes G gráf szögpontjai. Akkor az (1) permutáció meghatározza a G -nek egy p -oldalú poligon részét az $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_p a_{p+1}$ oldalakkal. Legyen $\pi_i (i=1, \dots, p)$ úgy értelmezve, hogy $\pi_i = \rightarrow$, ha az $a_i a_{i+1}$ oldal irányítása (a G -ben) az « a_i -ből a_{i+1} -be» haladási iránnyal megegyező, míg $\pi_i = \leftarrow$, ha ez a két irány ellenkező. Ezután a (2)-beli Π -t ismét profilnak nevezhetjük (pontosabban: Π az A permutációnak a G irányított gráfra vonatkoztatott profilja). Megfelelőleg az $N(\Pi)$ helyett beszélhetünk az $N(\Pi, G)$ számosságról. Ha mármost a G összes lehetséges irányításai közül a képzelhető legegyszerűbb esetre szorítkozunk, amelyben ugyanis a G egyik szögpontjából csak kifelé irányuló élek vezetnek, egy második szögpontból a még hátralevő szögpontokba ismét csak kifelé irányuló élek visznek, és így tovább (az úgynevezett «tranzitív irányítású» gráf), akkor az imént értelmezett általánosabb profil ebben a különös esetben egyező a dolgozatban tekintett esettel. Ha pedig mintegy másik végletként a G irányítását nem korlátozzuk, ellenben csupán a legegyszerűbb $\Pi = \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow$ profilra szorítkozunk, akkor az első ízben általam³ vizsgált «ren-

³ L. RÉDEI, Ein kombinatorischer Satz, Acta Sc. Math. (Szeged), 7 (1934), 39–43.

dezett permutációk» fogalmára jutunk. Ezekkel részletekbe menően foglalkozik SZELE.⁴ Valószínűnek látszik, hogy WALDAPFELnek fenti dolgozatban nyert eredménye is továbbiakkal bővíthető. A legáltalánosabb $N(\Pi, G)$ számosság kérdésével bizonyára még senki sem foglalkozott.

ÜBER DAS PROFIL DER PERMUTATIONEN.

Wir definieren das Profil einer Permutation $A = a_1 \dots a_n$ von $n(=p+1)$ Elementen im wesentlichen nach SCHRUTKA² so. Man nehme (in waagerechter Lage) eine Strecke, teile sie in p gleiche Teilstrecken, versehe sie (von links nach rechts fortschreitend) der Reihe nach mit einem Pfeil \rightarrow oder \leftarrow , je nachdem in A die Elemente a_i, a_{i+1} in keiner Inversion bzw. in einer Inversion stehen ($i = 1, \dots, p$). Die Folge $\Pi = \pi_1 \dots \pi_p$ dieser Pfeile heisst dann das Profil von A . (Das «leere» Profil $\Pi = 0$ entspricht dem Fall $p = 0$). Zugleich nenne man einen Teilungspunkt (die Endpunkte der anfangs angenommenen Strecke gelten auch als Teilungspunkte) einen Anstosspunkt von Π , wenn alle benachbarten Teilstrecken (deren Zahl also zwei oder eins ist) gegen diesen Teilungspunkt gerichtet sind; die Menge der benachbarten Teilstrecken heisst [dann [die Umgebung des Anstosspunktes. Die Zahl der letzteren sei $r (\geq 1)$. [S. die schematische Abbildung (5) eines Profils mit $p = 10, r = 4$, wobei auch die Anstosspunkte markiert sind.] Vor dem k -ten Anstosspunkt mögen p_k Teilstrecken liegen, und die Pfeile vor und nach seiner Umgebung die Profile Π'_k und Π''_k bilden (die auch leer sein können). Dann gilt für die Anzahl $N(\Pi)$ der Permutationen mit dem Profil Π die Rekursionsformel (6).

L. Waldapfel.

⁴ SZELE TIBOR: Kombinatorikai vizsgálatok az irányított teljes gráffal kapcsolatban. Ez a kötet 223—256. l. Fentlevő fogalmak részben ebből a dolgozattól vannak átvéve.

NEWTON ÉS KORUNK TUDOMÁNYA.

SZÜLETÉSÉNEK 300-IK ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL.

I.

1642. január 8-án halt meg GALILEO GALILEI és 1642. december 25-én (az új naptár szerint 1643. január 8-án) született ISAAC NEWTON.

Az újkori tudományos gondolkodás fejlődésének igen nevezetes korszaka az, melyet GALILEI és NEWTON tevékenysége határol. GALILEI nem volt a legelső, ki az újkori tudományos gondolkodást megindította, előtte volt COPERNICUS és mások, de ő volt az, aki a tudományos mechanikát, nevezetesen a dinamikát megalapította, aki az égi jelenségekre a megfigyelés új módszereit alkalmazta és számos felfedezésével a COPERNICUS-féle felfogást diadalra juttatta. Az ő érdeme elsősorban, hogy a spekulatív, illetőleg a tekintélyre támaszkodó aristotelikus-szcolasztikus természetfelfogás helyet adott egy a jelenségek megfigyelésére támaszkodó természetszemléletnek. Ezért nehéz küzdelmei voltak és amint közismert, üldözésben is volt része. Az ő pompás egyénisége kiválóan alkalmas volt arra a szerepre, amit a sors számára kijelölt : megnyerő, temperamentumos egyéniség, kitűnő társalkodó és író, aki a harc elől nem tért ki és aki igyekezett felfogását érvényre is juttatni. Ha volt is üldöztetésben része, ha élete végét házi fogságban töltötte is, ez sikerült is neki és hatása egész Európában óriási volt, úgyhogy utána az egész szellemi szituáció megváltozott, sokhelyütt közvetlen vagy közvetett tanítványai voltak, akik és mások nem hagyták kialudni az új szellemi mozgalom fáklyáját. VIVIANI, BORELLI, TORRICELLI, GILBERT, PASCAL, GRIMALDI, DESCARTES, HUYGENS és mások jelentékeny megfigyelésekkel és



Newton.

belátásokkal vitték előre természetfelfogásunkat. Midőn NEWTON 1665 körül megkezdí tudományos kutatásait, a megfigyelésre támaszkodó tudomány már számos eredményre hivatkozhatott és sok és jelentékeny híve volt. Nagy felfedezések és gondolatok, mély sejtések szinte burjánoztak ebben az időben. NEWTON szerepe nem az volt, hogy a kor irányzatával megküzdjön, nem is az, hogy beilleszkedve a kísérleti kutatás irányába, azt néhány nagyértékű eredménnyel gazdagítsa, hanem hogy a szétszórt kezdeményezéseket egy nagy egységbe foglalja össze és az egész természetfelfogást oly relatív befejezéshez juttassa, amely közel két évszázadig a természettudományos gondolkodás formáit óriási tartalmi gazdagodás és elmélyülés dacára egyértelműen megszabta.

Életpályája nélküli azokat a drámai momentumokat, amelyekkel GALILEINél találkozunk. Született *Woolsthorpe*-ban, ahol atyjának kis birtoka volt. Csendes, magábavonuló gyermek, aki szenvedéllyel foglalkozik kis gépek előállításával, majd kémiai kísérletekkel. *Cambridge*-ben a Trinity Collegeben végzi egyetemi tanulmányait és tanárában, BARROWban híú támogatót és barátot nyer, aki majd tanszékét is átadja neki, midőn teológiai kérdésekbe elmerülve a tanítástól visszavonul. Midőn eléri azt a kort, hogy tudományos kérdésekkel önállóan kezd foglalkozni, a *Cambridge*-ben dúló pestis két évi vakációt szerez számára, amelyet visszavonulva *Woolsthorpe*-ban, birtokán tölt. Ez egy olyan magábavonuló, külső buzdításra csak kevéssé szoruló egyéniség számára, mint amilyen NEWTON volt, a sors megbecsülhetetlen ajándéka volt. Ekkor alakultak ki korszakalkotó felfedezései: optikai vizsgálatai, a fluxiószámítás és gravitációs kutatásai. Visszatérve *Cambridge*-be elnyeri BARROW tanszékét és évekig teljes nyugalomban dolgozhat. Gondolatait közli barátaival, de publikálásra csak nehezen, sok biztatásra szánja el magát. Irtózik nemcsak a külső harctól, de minden tudományos vitától is és e tekintetben minden határon túl érzékeny. Mégis számos tudományos vitája volt, így LEIBNIZ-cel, HUYGENS-sel és HOOKE-kal. Ötvenéves korában egy múló megbetegedéssel, amely időből néhány különös levele maradt fenn, produktív tudományos működése megszűnik, későbbi publikációi régebbi gondolatainak kifejtései. Ír még néhány teológiai művet, így DÁNIEL jóslatainak értelméről.

1694-ben MONTAGUE, a későbbi HALIFAX grófja támogatásával az állami pénzverde ellenőre, 1699-ben igazgatója lesz, ez kényelmes és jól javadalmazott állás, amely igen megfelelt NEWTONnak. Tekintélye igen nagy, az udvar kegyeltje, a Royal Society elnöke. Midőn 1727-ben meghal, a Westminster apátságban temetik el, a gyászszertartásnál halotti leplét az angol arisztokrácia tagjai tartják. Sírfelirata a következő:

Hic situs est
 Isaacus Newton, Eques Auratus,
 Qui animi vi prope divina,
 Planetarum motus, figuras,
 Cometarum semitas, Oceanique aestus,
 Sua Mathesi facem praeferente,
 Primus demonstravit.
 Radiorum Lucis dissimilitudines,
 Colorumque inde nascentum proprietates,
 Quas nemo antea vel suspicatus erat, pervestigavit,
 Naturae, Antiquitatis, S. Scripturae,
 Sedulus, sagax, fidus Interpres,
 Dei Opt. Max. Majestatem philosophia asseruit,
 Evangelii simplicitatem moribus expressit.
 Sibi gratulentur Mortales, tale tantumque exitisse
 HUMANI GENERIS DECUS.
 Natus XXV. Decemb. MDCXLII. Obiit. XX. Mar. MDCCXXVII.

Magyar fordításban:

Itt nyugszik
 NEWTON IZSÁK lovag,
 Ki majdnem isteni szellemi erejével
 A bolygók mozgását, alakját,
 Az üstökösök pályáját, az Óceán járását
 Az Ő matematikája által vezérelve
 Először határozta meg.
 A fénysugarak különbségét,
 Az ebből eredő színek sajátságait,
 Amit senki addig nem is sejtett, kikutatta,

A természet, a régiségek, a Szentírás,
Szorgalmas, éleseszű és hű magyarázója.

A mindenható Isten fenségét bölseletileg hirdette,

Életmódjában az evangéliumi egyszerűség nyilvánult meg.

A halandók szerencséseknek tekinthetik magukat, hogy köztük élt

AZ EMBERISÉGNEK EZ A DÍSZE.

Született 1642. dec. 25., meghalt 1727. márc. 20.

Cambridge-ben a Trinity Collegeben szobrot emeltek emlékére, melynek felirata: «Qui genus humanum ingenio superavit». «Ki az emberi nemet szellemével felülmulta».

Ha ezt a megbecsülést, mellyel kortársai NEWTON szellemének hódoltak, összehasonlítjuk GALILEI sorsával, kinek nem engedték meg, hogy a s. Croce-templomban levő családi sírboltjába temetkezhessek, fájdalmas érzés tölt el.

A kontinensen NEWTON korában a DESCARTES-féle természet-filozófia uralkodott és eltartott 50 évig a Principia megjelenésétől számítva, míg NEWTON tanai elismerést nyertek. Nagy kortársai közül LEIBNIZ ellenfele volt és HUYGENS csak félig ismerte el és végre VOLTAIRE «Elements de la Philosophie de Neuton» c. munkájával, mely 1738-ban jelent meg, juttatta Franciaországban elismeréshez, hol azután tanai a legnagyobbyszerű fejlődésnek indultak és hová a XVIII. század végén a fizikai kutatás súlypontja áthelyeződött. LAPLACE, az égi mechanika legnagyobb továbbfejlesztője úgy nyilatkozott, hogy a «Principia» kimagaslik az emberi szellem összes alkotásai közül, és LAGRANGE, akinek az általános mechanika mai alakját köszönhetjük, azt írja, hogy «NEWTON nemcsak a legnagyobb szellem volt, aki valaha élt, hanem a legszerencsésebb is, mivel csak egy mindenség létezik és így a világtörténet folyamán csak egy embernek adatik meg, hogy a világ törvényeit felfedezze».

Ezen elsőrendű szellemek hódolatát nem tekinthetjük szónoki frázisnak, amely sokszor igen gyorsan múló nagyságoknak is kijut, hanem ama rendkívüli benyomás tanúságának, amelyet NEWTON műve a legjobbakra tett. Láthatjuk, hogy NEWTON teljesítményeit nemcsak nagynak és korszakalkotónak tekintették, hanem szó szerint felülmúlhatatlannak és egyedülinek. Megindult tehát az a

folyamat, amellyel a szellemi élet más területein is annyiszor találkozunk és amely abban áll, hogy egy emberi kiválósággal szemben minden mértéket elveszítenek, azt szinte kozmikus méretekre nagyítják, amit egy pregnáns szóval abszolutizálásnak nevezhetünk.

Mi volt evvel szemben NEWTON saját véleménye önmagáról? Kétségkívül tudatában volt saját jelentőségének és főképp élete későbbi szakaszában igen jelentékeny önérzetet árult el; nem volt mindig igazságos és méltányos más kutatókkal és versenytársaival, mint LEIBNIZ, HUYGENS és főképp HOOKE-kal szemben. De ismeretes egy nyilatkozata:

«I do not know what I may appear to the World but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.»

«Nem tudom, hogy minek látszom a világ szemében, de magam szemében hasonlónak látszom egy gyermekhez, aki a tengerparton játszik és avval mulat, hogy néha egy simább kavicsot és szebb kagylót talál mint közönségesen, míg az igazság nagy óceánja kifürkészetlenül terült el előttem.»

E sorok mutatják, hogy NEWTON távol volt saját fizikai világ-felfogása abszolutizálásától és távol attól, hogy azt lezártnak tekintse. Felfogása az volt, amit ma úgy szoktunk jellemezni, hogy «felfelé nyitott» világképe volt, mely új elvi lehetőségek sorát megengedi. E sorok NEWTON igazi vallásosságára jellemzőbb világot vetnek, mint naív és absztruz, kora felfogásán egyáltalában felül nem emelkedő spekulációi DÁNIEL jövődöléseiről.

A tartózkodás a mindent-egy-nevezőre való hozástól, az elismerése annak, hogy azonkívül, amit tisztán átláthatunk és tapasztalhatunk, még másnemű és igen releváns dolgok is vannak, ez mai szemmel nézve NEWTON vallásosságának igazi magva. Hogy ez a másvalami a XVII. század puritán légkörében sokszor igen naív alakban nyilvánult meg, az másodrendű dolog. Ezekben a dolgokban NEWTON nem emelkedett kora színvonala fölé és soha nem járt azokban a mélységekben, mint kortársa BLAISE PASCAL.

Különben megjegyezhetjük, hogy a tartózkodás a túlságos egyszerűsítéstől tipikusan angol jellemvonás és legnagyobb ellentét

a franciák által olyannyira értékelt egységes és végletekig következetes beállítással szemben. Ezt fejti ki TAINE, ha SHAKESPEARE-ről vagy CARLYLE-ről ír, ezen esik kétségbe DUHEM, ha az angol és a francia fizikát hasonlítja össze. Milyen tiszta, logikus alapfeltevések DESCARTES-nál, LAPLACE-nál, milyen képletes, inkonzekvens, sokszor homályos, de erőteljes duzzadó képek FARADAY-nál, MAXWELL-nél, J. J. THOMSON-nál! Ezek tudják, hogy az erővonalak, feszültségek csak képek, amelyeket addig használunk, míg előreviszik az elméletet, azután meggondolás nélkül elejtik vagy mással helyettesítik.

NEWTON is, aki a racionális, az átérthető, a konzekvens körét annyira kiterjesztette, mint senki más előtte, nem terjesztette ezt ki világnézete egészére és tudatában volt annak, hogy a világos látás tartományát a sejtések széles birodalma veszi körül. Azonban meg kell jegyezni, hogy túlzott szkematizálástól népek jellemzésénél óvakodnunk kell, mert éppen NEWTON kortársa, BLAISE PASCAL, igen elűt attól a típustól, amit TAINE és DUHEM a franciákra jellemzőnek tart.

Hogy NEWTON érdemeit helyesen értékelhessük, vegyük jobban szemügyre azt a szellemi-szituációt, amelyben élt. Már említettük, hogy ez a kor tele volt a legértékesebb kezdeményezésekkel, sejtésekkel és teljesítményekkel. NEWTON olyan kérdések megoldásaival érte el legnagyobb sikereit, amelyek napirenden voltak, melyekben mások értékes részleteredményeket értek el.

NEWTON egyik nagy felfedezése a binómiális tétel volt. $1-x$ egész számú hatványainak kifejezése ismeretes volt. NEWTON interpolációval megadta a kifejtést, ha a kitevő közbenső szám $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... és összehasonlította a megfelelő gyökfejtéssel nyert kifejezéssel. Majd a sorok általánosabb kérdéseivel foglalkozott és néhány fontos sorkifejtést, mint a szinusz, koszinusz és az exponenciális függvény sorát adta meg.

Az integrál- és differenciálszámítás számos problémájával, mint terület, köbtartalom, ívhossz, az érintő meghatározásának és a szélső értékek megállapításának kérdéseivel NEWTON előtt több kiváló matematikus foglalkozott és egyes speciális problémáknál jelentékeny eredményeket értek el. Így, ha ARCHIMEDES régebbi vizsgálataitól eltekintünk, felemlíthetjük CAVALIERI, KEPLER,

PASCAL, FERMAT, WALLIS és BARROW idevonatkozó vizsgálatait. A nagy lépés annak a felismerése volt, hogy ezek a problémák lényegileg összefüggnek és megoldásukra általános módszer adható meg. Ezt a lépést NEWTON és LEIBNIZ tették meg tudatosan és evvel megállapították a differenciál- és integrálszámítás módszerét. Kettőjük közt hosszú és elkeseredett prioritási vita folyt le, amelyben a párt és nemzeti hiúság szempontjai nagyon elhomályosították a tényállást. NEWTON később publikált, mint LEIBNIZ, a «fluxió» szó, NEWTON jelölése a differenciálhányados számára csak 1687-ben, a Principiában fordul elő először a formalizmus közlése nélkül, amelyet csak WALLIS közölt 1693-ban, míg LEIBNIZ alapvető értekezése 1684-ben jelent meg, melynek célszerű jelölései a matematikusok közkinségévé váltak. Másrészt nem tartják kizártnak, hogy NEWTON régebbi célzásairól LEIBNIZ tudomást szerezhetett. Azt hisszük, az egykorú irodalomban célzás elég volt, de két olyan univerzális gondolkodóra, mint amilyen LEIBNIZ és NEWTON volt szükség, hogy a problémát teljesen megoldják.

Érdekes különben, hogy bár a fluxio szó és fogalom NEWTON Principiájában előfordul, tételei levezetésénél úgy az ő új eljárását, mint az analitikai geometriát is mellőzi és mindenütt a régi geometriai módszereket használja, ami műve olvasását ma igen megnehezíti.

NEWTON alapvető mechanikai felfedezései is elő voltak készítve. Miután GALILEI a mechanika alapelveit nagymértékben tisztázta, DESCARTES 1644-ben a NEWTONRÓL nevezett első axiómát explicite ki is mondta. Hogy az erő mértéke a gyorsulás, azt is a földnehezési erő esetében már GALILEI megállapította, de nem mondta olyan általánosságban ki, mint NEWTON. Sőt már 1500 évvel előbb PLUTARCHOS «De facie in orbe lunae» c. művében kifejti, hogy a Holdat nem a könnyű lég tartja lebegve és akadályozza meg abban, hogy a Földre essék, hanem mozgása, úgy mint a parittyánál a mozgás tartja a zsinórt kifeszítve.

Sőt a gravitáció speciális feltevése sem volt merőben új: GILBERT «De magnetibus» c. művében, 1600-ban kifejti, hogy a Föld úgy vonzza a Holdat, mint egy mágnes. KEPLER tovább megy, azt hiszi, minden anyag vonzza egymást és az apályt és dagályt a Hold vonzása idézi elő. A bolygók mozgását a Nap vonzása idézi elő,

amelyről felteszi, hogy a távolság négyzetével fordítva arányos. Persze itt helyes belátása zavaros gondolatokkal van keverve. Még nem szabadult meg a régi felfogástól, amely szerint a mozgás fenntartására van szükség erőre, és nem a mozgás megváltoztatására és azért azt hiszi, hogy ez az erő nem vonzó, hanem mozgató, «*mon est attractoria, sed promotoria*». Azután fel is adja részben helyes feltevését és a távolság első hatványával való fordított arányosságot vesz fel. Arra nem is tesz kísérletet, hogy ezen feltevésből a bolygómozgás általa felismert törvényeit levezesse. NEWTON szűkebb környezetében is diszkutálták a távolság négyzetével fordított erőtvénnyt és ebből a bolygók pályáinak levezetését, sőt éppen ezek a diszkussziók indították NEWTONT eredményei publikálására. Tehát ezek a gondolatok a levegőben voltak, a nélkül azonban, hogy a kor uralkodó felfogását képezték volna. Az uralkodó felfogás, miután az arisztotelikus és szkolasztikus természetszemlélet a vezető szellemeknél hitelét veszítette, DESCARTES felfogása volt, ez volt a felfogás Cambridge-ben is. DESCARTES alapfelfogása az volt, hogy mindenekelőtt tiszta, átlátszó alapfeltevésekből kell kiindulni, akkor helyes következtetésekkel szükségképpen helyes eredményre jutunk. Kifogásolja, hogy GALILEI mechanikáját kísérletekre és nem általános elvekre alapítja. Ő maga kiindul abból a feltevésből, hogy az anyag alapvető saját-sága a kiterjedés, üres tér nincs, a világteret finom anyag tölti be. Ezen anyagban örvények vannak, amelyek magukkal ragadják a bolygókat. Vonzó, általános, de nem kvantitatív világtkép volt ez. Azt nem kísérlete meg, hogy ezen alapon a bolygómozgás törvényeit levezesse. Az üstökösök mozgását úgy fogta fel, hogy ezek egyik örvénytől egy másikig sodródnak.

NEWTON felfogása ettől a felfogástól igen mélyen eltért. Ő nem kérdezte, hogy miért mozog egy test, hanem hogy hogyan mozog. Többször kifejtette, hogy ő csak arra szorítkozik, ami látható, a többi az hipotézis, amit lehet így és úgy felvenni. «*Hypotheses non fingo*.» Egyik legnagyobb érdemének tartotta, hogy a DESCARTES-féle örvényelmélet tarthatatlanságát kimutatta.

Láthatjuk, hogy NEWTON korában mechanikájának számtalan gondolata már felvetődött, de keverve egészen másnemű gondolatokkal, amelyek közt sok hibás volt és a jók közt sok csak sejtés

volt vagy meg nem alapozott feltevés. NEWTON nagy érdeme nem az volt, hogy addig fel nem merült, merőben új gondolatokat vetett volna fel. Hanem olyan gondolatokra jött reá, amelyek a levégőben voltak, de ezek közül csalhatatlan biztonsággal kiválasztotta az értékeseket. Mások is felvetették a távolság négyzetével fordítottan arányos vonzás gondolatát, azonban NEWTON kimutatta, hogy az erőtvörvény nem is lehet más, ha a bolygómozgás törvényei olyanok, mint ahogy azokat tapasztaljuk. Másrészt azt is kimutatta, hogy az erőtvörvényből a KEPLER-féle törvények következnek. A mi másnál sejtés, az nála bizonyosság, ami pedig nagy különbség.

NEWTON gravitációelmélete a pestis éveiben, 1665- és 1666-ban, woolsthorpe-i magányában alakult ki. Az első konkrét eredmény a Hold mozgásának értelmezése volt avval a feltevessel, hogy a földnehézség és a Holdra ható erő ugyanaz. Eredményeit nem publikálta, az elterjedt felfogás szerint azért, mert a Föld sugarára rossz adat állott rendelkezésére és így a Holdnak észlelt és elméletéből számított gyorsulása nem egyezett eléggé meg. De úgy látszik, más nehézségei is voltak, így nehézséget okozott az a gondolat, hogy a Föld belsejének tömegei a Föld tömegén át hassanak és a Föld vonzó hatása úgy jelentkezék, mintha az egész tömeg középpontjában volna egyesítve.

NEWTON a mechanika alapelveit és a gravitáció elméletét a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* c. főművében fejtette ki, mely mű a Royal Society kiadásában, Londonban, 1687-ben jelent meg.

Megjelenésének története annyira jellemző Newtonra, hogy röviden felemlítjük. 1679-ben HOOKE, a Royal Society titkára felszólította NEWTONT, hogy írjon valamit és főkép kérte véleményét arra vonatkozólag, hogy a bolygómozgás hogyan jön létre az érintő irányában való sebesség és a központ felé irányuló erő hatása alatt. NEWTON válaszában kifejezi ellenszenvét, hogy ezekről bármit is közöljön, de hogy mégis kielégítse HOOKE kérését, egy kísérletet javasol, mely a Föld forgását volt hivatva bizonyítani és nagy magasságból eső testek pályájára vonatkozik. Levélváltás kezdődött HOOKE-al, melynek folyamán HOOKE explicite kijelentette, hogy a bolygómozgás magyarázatára szolgáló erő

a távolság négyzetével fordítva arányos erő. Ugyanekkor HOOKE, WREN és HALLEY is tárgyalták a bolygómozgást, és ekkor HOOKE azt állította, hogy a pálya az említett erőtvény esetében ellipszis; bizonyítást is ígért, de nem szolgáltatott. Ekkor HALLEY Cambridge-be ment és megkérdezte NEWTON véleményét, aki megmondta, hogy a pálya ellipszis, ő már régebben kiszámította és néhány nap múlva el is küldte a bizonyítást. Evvel a jég meg volt törve és HALLEYnek sikerült NEWTONT rávenni mechanikája publikálására, magára vállalva a kiadás adminisztrációját, sőt az azért való anyagi felelőséget is.

Foglalkozunk kissé bővebben evvel a rendkívüli művel.

Bevezető részében a mechanikának NEWTONról elnevezett axiómáit tárgyalja. Megjegyzései az abszolút térre és időre vonatkozóan ma igen szolasztikus benyomást tesznek, mert NEWTON ki mindig az észlelhetőre való megszorítást hirdette, itt nyilván nem tudta magát függetleníteni a korában elterjedt felfogásoktól és oly dolgokról beszél, amelyek nem észlelhetők.

Axiomái mai napig a mechanika alapját képezik, csak a fogalmak némi szabatosabbá tételére volt szükség. Már az első axiómánál meg kell mondani, hogy mit értünk magára hagyott test alatt, hogy milyen koordinátarendszerre vonatkoztatjuk a test mozgását és milyen órával mérjük az időt. Erre röviden azt lehet mondani, hogy találhatók olyan koordinátarendszerek, amelyekben minden más testtől elegendő távol levő test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, ha az időt alkalmas periódikus jelenséggel, mai tudásunk szerint pl. kvarc piezoelektromos rezgése által szabályzott órával mérjük. Egy olyan koordinátarendszert, amelyben az első axióma érvényben van, inerciarendszernek neveznek. Minden egy inerciarendszerhez egyenletes mozgást végző rendszer szintén inerciarendszer. Jó megközelítésben az állócsillagokhoz rögzített rendszer egy inerciarendszer.

A második axiómát felfoghatjuk mint az erő definícióját, ha a tömeget, ill. az impulzust definiáltuk. A tömeg általános definíciójára a harmadik axióma szolgálhat. Ha az erőt statikailag definiáljuk, úgy a második axióma egy természeti törvényt fejez ki, azt, hogy a statikai erő az, ami az impulzus változására, ill. a gyorsulásra mérvadó.

Meg kell azonban jegyezni, hogy a NEWTON-féle axiomatika nem tekinthető egyenértékűnek egy olyan szigorú értelemben vett axiomatikával, mint azt ma HILBERT óta értelmezzük, tehát egy olyan rendszerrel, mely minden alapfogalmat és köztük fennálló összes független relációkat felsorolja, miáltal a fogalmak is definiálva vannak.

Ilyen értelemben vett axiomatika felépítésére HAMEL és legújabban HERMES tettek kísérletet, az utóbbi a WHITEHEAD—RUSSELL-féle Principia nyelvén. Mivel ma a klasszikus mechanikát a relativisztikus, ill. a kvantummechanika bizonyos határesetének tekintjük, lehet hogy ezekre előbb fog egy modern axiomatika kialakulni.

A Principia első könyvében a testek mozgását tárgyalja, midőn a következő tételeket mutatja ki:

Centrális erő esetében a rádiusvektor által súrolt terület az idővel arányos. A távolság négyzetével fordítottan arányos erő esetében a pálya kúpszelet. A kúpszelet meghatározására több tételt közöl. Megvizsgálja kiterjedt testek vonzását és kimutatja, hogy homogén gömb külső pontra olyan erőt gyakorol, mintha tömege középpontjában volna egyesítve, és az erő a távolság négyzetével fordítva arányos, míg belsejében az erő a távolsággal arányos. Tárgyalja az ingamozgást és a kényszersmozgást.

A második könyvben a mozgást sűrűlódással bíró közegben tárgyalja, tekintetbe véve a sebességgel és a sebesség négyzetével arányos ellenállást. Levezeti a légnyomás változását a magassággal. Tárgyalja az ingamozgást és először hozza javaslatba az inga felhasználását a földnehézségi erő változásának kimutatására. Egy kifejezést ad a hang sebességére, ami az első példa arra, hogy egy hullám terjedési sebességét a közeg sajátságai alapján ki lehet számítani. Azután tekintettel DESCARTES örvényelméletére, megvizsgálja azt az áramlást, amelyet egy forgó gömb végtelen kiterjedésű sűrűlódó közegben kelt és kimutatja, hogy így a bolygók mozgása nem értelmezhető.

A harmadik könyvben a világegyetemet tárgyalja. Kimutatja, hogyan kell a Nap és a bolygók tömegeit a Föld tömegével kifejezni, megállapítja a bolygók alakját, a nehézség változását a szélességgel, az árapály és dagály főbb jellemvonásait, értelmezi a napéj-

egyenpontok precessióját a Napnak a nem-gömbalakú Földre való vonzó hatásából.

A Hold mozgásának főbb perturbációiról is számot tudott adni. Így a TYCHO által felfedezett ú. n. variációról, mely abban áll, hogy a Hold pályáját változó sebességgel futja be, amennyiben a Naptól a Holdra ható erő annak mozgását hol gyorsítja, hol hátráltatja. Azonkívül számot tudott adni még két ú. n. szekuláris perturbációról, amelyek nem a Hold mozgására vonatkoznak egy változatlanul feltett pályájában, hanem a pálya elemeinek, speciálisan helyzetének megváltozásában állanak. Az egyik abban áll, hogy a Hold pályájának az ekliptika síkjával való metszészvonala a Hold mozgásával ellentett irányban mozog. Ez onnan ered, hogy a Nap vonzóerejének, mely az ekliptika síkjában hat, van egy olyan komponense, amely merőleges a Hold pályájára és amelynek folytán a Hold előbb éri el az ekliptikát. Hasonlóan számot adott a Holdpálya nagytengelyének előrehaladásáról is.

Igen fontos az üstökösök pályáira vonatkozó vizsgálata. Kimutatta, hogy egy üstökös pályáját három észlelésből meg lehet határozni. Módszerét az 1680. évi üstökösre alkalmazta és kimutatta, hogy a számított helyek az észleltekkel megegyeznek és így a gravitációs törvény érvényességét üstökösökre is kimutatta. Ez igen fontos volt már azért is, mert az üstökösök minden irányban, így a bolygók mozgásával ellentett irányban is mozognak, ami lehetetlenné teszi mozgásuknak a DESCARTES-féle örvényekkel való értelmezését. A HALLEYről nevezett üstökös újra való megjelenése az elmélet nagy diadala volt.

Példátlanul gazdag tartalom, hasonlít egy tankönyvhöz, mely generációk munkájáról számol be!

Még hozzátehetjük, hogy az égi mechanika további fejlődése a NEWTON-féle alapok változatlanul való megtartásával történt és a pontosabb számítás teljesen igazolta NEWTONT. A Merkúr pályájának kismértvű elforgása az egyetlen, amiről nem lehetett számot adni és amelyet a NEWTON-féle törvénynek az általános relativitás elméletéből adódó kismértvű módosulása magyaráz.

A földi testek közt fennálló vonzás kimutatása NEWTON idejében nem volt lehetséges. Csak miután a kísérleti technika előrehaladt, nevezetesen miután CAVENDISH a torziós ingát alkalmazta,

sikerült ez és az ú. n. gravitációs állandó meghatározása. Hogy a vonzás a tömeggel arányos és nem függ az anyagi minőségtől, ezt az alapvető természeti törvényt, melyre később EINSTEIN gravitációelméletét alapította, legnagyobb pontossággal EÖTVÖS LORÁND mutatta ki, aki különben is a földnehézségi erő változásainak kutatásában összes előzőit felülmúlta.

NEWTON Principiájában a mechanika megkapta azt a biztos alapot, amely megengedte, hogy sok kérdést deduktíve lehessen az alapfeltevésekből kiindulva tárgyalni. Evvel a fizikának, sőt a tudománynak kétségtelenül új korszaka kezdődött.

Kissé más NEWTON optikai felfedezéseinek jelentősége. A fényről való felfogások kétségtelenül kevésbé előrehaladt állapotban voltak NEWTON idejében, mint a mechanikára vonatkozóak. Ismeretesek voltak a visszaverődés és részben a törés törvényei, a távcsöveket már felfedezték, de a színekről igen homályos fogalmak voltak elterjedve. A színeket sötétség és világosság keverékének tartották. DESCARTES szerint a fény mint nyomás terjed a mindent betöltő közegben. A színek a közeg részecskéinek forgási sebességével függnek össze. Másrészt HUYGENS felállított egy hullámelméletet, amellyel a visszaverődés, törés és kettőtörés törvényeit sikerült megmagyaráznia. Érdekes, hogy NEWTON a kettőtörésnek HUYGENS-féle értelmezését nem fogadta el, hanem helyette egy másikat adott, ami semmit sem magyaráz. HOOKE is a hullámelmélet híve volt, szerinte a színek a hullám alakjával függnek össze, amit azonban igen zavarosan jellemez. Különben HUYGENS is távol volt attól, hogy a színeket vagy a GRIMALDI által 1666-ban felfedezett elhajlásjelenségeket értelmezni tudta volna, ami csak sokkal később sikerült FRESNELnek.

NEWTONnak két nagy felfedezése volt az optika területén.

Először híres prizmakísérletével kimutatta, hogy a fehér fény különböző törésmutatójú színes fényre bontható fel.

Másodszor gondosan és kvantitatíve megvizsgálta a vékony lemezek színeinek korában már ismert jelenségét. Egy nagy görbületi sugarú lencsét helyezett sík üveglapra. Ezáltal elérte azt, hogy a réteg vastagságát mindenütt meg tudta határozni és így az előálló színgyűrűk függését a rétegvastagságtól meg tudta vizsgálni. NEWTON a jelenséget úgy értelmezte, hogy a fénysugár

mentén a fény állapota periódikusan változik úgy, hogy egy szakaszban olyan állapotban van, hogy könnyen szenved reflexiót, ez váltakozik egy másik állapottal, melyben könnyen áthalad a határfelületen. A periódus hosszát különböző színű fényre meg is állapította megegyezésben a hullámhossznak ma ismert értékével. Csodálatos, hogy NEWTON, ki a hullámtermészetre vonatkozó alapkísérletet végezte el és egészen helyesen a fény periodikus sajátosságára következtetett belőle, a hullámelmélettel ellentétes álláspontot foglalt el. Nehézséget okozott számára az, hogy a fény (nem túlkicsiny!) nyíláson át egyenesvonalban terjed.

Újabban felismerték, hogy a fény korpuszkuláris sajátosságokkal is bír, nevezetesen az energia és impulzus átadása bizonyos elemi mennyiségek egész számú sokszorosára szerint megy végbe. Azonban alig mondhatjuk, hogy ez a fotonelmélet NEWTON sejtését igazolta volna, mert NEWTON korpuszkulái és a fotonok lényegesen más sajátosságokkal bírnak és a hullámtermészetet a fotonelmélet sem nélkülözheti.

NEWTON különben arra is gondolt, hogy a fénysugárban bizonyos kitüntetett síkok létezhetnek és a polárosság neve is tőle ered.

A törés vizsgálatánál NEWTON azt találta, hogy a spektrumok egyenlő hosszúak, ha a közepes eltérítés megegyezik különböző törésmutatójú prizmánál. Ebből azt következtette, hogy achromatikus lencsek nem készíthetők. Ez a téves megállapítás nagymértékben hátráltatta a távcsövek fejlődését, másrészt előmozdította a tükrös teleszkópok tökéletesítését, ami tekintve, hogy mai nap milyen szerepet játszanak azok az asztronómiában, talán nem is volt olyan nagy baj! Különben NEWTON készítette az első tükrös távcsövet és a hajózásban oly fontos sextáns alapgondolata is tőle ered.

NEWTON optikai vizsgálatai nagy lépéssel vitték előre a fényre vonatkozó ismereteinket, de a mai optika összképe sokkal jobban különbözik NEWTON elgondolásától, mint a mai mechanika a Principia mechanikájától.

II.

Az előbbieken vázolni igyekeztük azt az átalakulást, amelyet NEWTON fellépte fizikai világképünkben előidézett. Most néhány

pillantást szeretnénk vetni arra, hogy hogyan fejlődtek gondolatai tovább és főképp hogy mennyiben tekinthető a mai fizikának több eltérő felfogása a NEWTON-féle fizika folytatásának?

A mechanika és speciálisan az égi mechanika szorosan NEWTON elgondolásainak keretei közt fejlődött és éppen ez volt az, ami NEWTON mechanikájának szinte dogmatikus tekintélyt kölcsönzött. De sikerült elgondolásait a fizika más területeire is nagy eredménnyel átvinni. Így az elektromos töltések közt működő COULOMB-féle erő teljes analogonja a tömegvonzásnak és hasonlóan a mágnesek közt működő erő is. Az elektromos áramok által létesített erőhatások, valamint a stacionárius áramok közt működő erők szintén beilleszthetők a távolbaható erők skémájába, ha nem is az erőtörvény szinte szó szerinti átvitelével, mint a sztatikus esetben.

Nagyobb nehézség adódott, miután FARADAY felfedezte a közeg sajátságainak, nevezetesen a dielektromos állandónak, ill. a permeabilitásnak hatását egyrészt, másrészt az elektromágneses indukció jelenséget. Történtek ugyan kísérletek az indukció jelenségének értelmezésére távolbaható erők felvételével, de ezek a töltések közt működő erők már igen eltértek a NEWTON-féle erő típusától, mert már a sebességtől függtek, ill. az idővel való terjedést is figyelembe vették és végeredményben nem is bizonyultak kielégítőknak.

A további fejlődés útja más volt. FARADAY a figyelmet a töltésekről a köztük levő térre irányította, bevezetve az erőtér fogalmát. Ő úgy fogta fel, hogy a tér olyan állapotba jut a töltések körül, mint egy erőhatásoknak kitett rugalmas közeg. Mélyenjáró, de matematikailag meg nem fogalmazott gondolatait MAXWELL öntötte matematikai alakba. MAXWELL bizonyos tekintetben visszatért a DESCARTES-féle felfogáshoz, midőn a közeg mechanizmusával óhajtott az elektromágneses tér sajátságait értelmezni. Ez az elgondolás kitűnően bevált a gázok kinetikai elméletében, de az elektrodinamikában csak mesterkelt konstrukciókhoz vezetett. Lord KELVIN, J. J. THOMSON, H. HERTZ, L. BOLTZMANN igen szellemes aethermodelleket gondoltak ki és evvel a cartezianizmus modern alakját valósították meg, amely azonban szintén nem bizonyult termékenynek.

De már MAXWELL a téregyenleteket tekintette tulajdonképpen alaptörvénynek és ezt azután HERTZ és HEAVISIDE nyomatékosan kiemelte. H. A. LORENTZ elektronelméletében visszatért ugyan az elektromosság korpuszikuláris szerkezetének gondolatára, de e részek kölcsönhatását nem elemi törvényekkel, hanem az üres térre vonatkozó MAXWELL-féle egyenletekkel fejezte ki.

A fizika fejlődésének ezt a szakaszát szokták úgy jellemezni, hogy az elektrodinamika a mechanikával szemben mint a fizika önálló tartománya alakult ki.

Kétségtelenül a különbség a régebbi felfogással szemben jelentékeny, és érthető, hogy eleinte szeretik a különbséget hangsúlyozni. Az elektronelmélet más, mint egy rejtett mozgásokra alapított mechanika és más mint a közvetlen távolhatásokra alapított mechanika. De kérdezhetjük, valóban nem mechanika-e az elektronelmélet? Nem mechanika, ha a mechanika fogalmát szűk körre szorítjuk, de ha azt kissé tágabban fogjuk fel, úgy igenis mechanika. Hogy ezt belássuk, térjünk vissza a XIX. század elejére, midőn a NEWTON-féle mechanika szoros keretein belül kialakult a potenciálmélet. Az erő levezethető a potenciálból, a potenciál pedig kielégít egy parciális differenciálegyenletet, az ú. n. Poisson-féle differenciálegyenletet, mely alkalmas egységek alkalmazásával a következő:

$$\Delta\varphi = -\varrho, \quad (1)$$

hol φ a potenciál, Δ a LAPLACE-féle operator és ϱ a sűrűség. φ a hely függvénye, mely egy skaláris teret határoz meg, ha ϱ a sűrűség adva van. φ gradiense negatív előjellel az erő, szintén a hely függvénye. Erőtér és potenciál itt matematikai segédfogalmak, minden meg van határozva a sűrűség (töltések vagy tömegek sűrűsége) eloszlásával. Másrészt éppen olyan joggal tekinthetnők a teret az alapvető fizikai mennyiségnek, midőn a sűrűséget mint az erőtér divergenciáját határozhatjuk meg. A töltések közti kölcsönhatás és a térfelfogás ezen az állásponton ekvivalens, ugyanazon tényállás két különböző alakban való kifejtése. Azonban nem egészen egyenlő értékű egy általánosítás szempontjából. Így a Poisson-féle egyenlet egy hullámegyenletté válik, ha a második térkoordináták

szerinti deriváltakhoz az időszerinti második deriváltat adjuk negatív előjellel:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\varrho. \quad (2)$$

Ennek az egyenletnek megoldása nem a NEWTON-féle potenciál, hanem a retardeált potenciál:

$$\varphi_P(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\varrho\left(x, y, z, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dx dy dz, \quad (3)$$

amelybe a sűrűségnek azt az értékét kell betenni, amellyel annyi idővel előbb bírt, mint amennyire a fénynek szüksége van arra, hogy az illető térfogatelem és a P pont közti r távolságot megtegye.

Az elektrodinamika térfelfogása a távolbaható erő fogalmának általánosítása, amelyben bizonyos dolgok, amelyek előbb pusztán segédfogalmak voltak, önálló jelentést nyertek.

Hogy itt egy általánosítással és nem valami egész másról van szó, az abból is kiviláglik, hogy a mechanika olyan tipikus fogalmai, mint energia, impulzus, impulzusnyomaték, feszültség, mind átvihetők az elektromágneses térre. Sőt írhatók a tér alaptörvényei az általános mechanika bármely szokott alakjában, így a HAMILTON-féle elv alakjában is, midőn a LAGRANGE-féle függvény a térintenzitásokkal fejezhető ki a következő alakban:

$$L = \frac{1}{2} (\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{E}^2). \quad (4)$$

Az ebből eredő másodfajtajú LAGRANGE-féle egyenletek éppen a MAXWELL-féle egyenletek. Éppúgy használhatjuk alapegyenletnek a HAMILTON-féle kanonikus alakot is.

Egy másik nevezetes általánosítására a mechanikának akkor volt szükség, mikor olyan részek mechanikájával kezdtek foglalkozni amelyek sebessége megközelíti a fény sebességét. Ilyen részek, pl. elektronok, elektromos és mágneses tér hatásának kitéve, úgy viselkednek, mintha tömegük megnövekedne. Legcélszerűbben ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a NEWTON-féle mozgásegyenletek alakját, nevezetesen az erő definícióját, mint az impulzus deriváltját megtartjuk, de az impulzus fogalmát megváltoztatjuk. Az impulzus lesz:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (5)$$

és így a mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \mathfrak{R}. \quad (6)$$

(Ha a mozgásegyenletet tömeg \times gyorsulás alakjában akarjuk írni, úgy meg kell különböztetni «longitudinális» és «transzverzális» tömeget, amelyek a következők:

$$m_l = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad m_{tr} = \frac{m}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \quad (7)$$

Írhatjuk a mozgásegyenleteket olyan alakban is, hogy a baloldalon a nyugalmi tömegnek a gyorsulással való szorzata álljon. Ezt úgy érjük el, hogy a mozgásegyenlet baloldalán a deriválást elvégezzük, a baloldalon hagyjuk $m \frac{dv}{dt}$ -t, és minden további tagot a jobboldalra viszünk át. Ha most $m \frac{dv}{dt}$ -t nevezzük erőnek, úgy mint a klasszikus mechanikában, akkor azt mondhatjuk, hogy az erő kifejezése változott meg.

Mindezek azonban csak felesleges komplikációk, és azért relativisztikus esetben arra az álláspontra helyezkedünk, hogy az impulzus változott meg és a mozgásegyenlet (6) alakban írandó.)

Az impulzus relativisztikus kifejezése átmegy a klasszikus kifejezésbe, ha a test sebessége kicsiny a fénysebességhez képest, ami még bolygók és üstökösök esetében is ki van elégítve.

A nagy sebességekre érvényes ú. n. relativisztikus mechanika formális befejezettség tekintetében nem marad el a klasszikus mechanika mögött, amelybe határesetben átmegy. Fontos elvi belátásokra vezet, mint a tömeg és az energia ekvivalenciájára.

Az itt vázolt módosítások egy egységes követelmény követelményei, t. i. hogy úgy a mechanika, mint az elektrodinamika, tehát a fény jelenségeinek törvényei invariánsak legyenek, ha egy koordinátarendszerről egy hozzá képest egyenletes egyenesvonalú mozgást végző rendszerre térünk át. Ha csak szorosabb értelemben vett mechanikai jelenségekre kívánjuk, akkor a klasszikus mecha-

nikából ismeretes ú. n. GALILEI-transzformációt alkalmazhatjuk, amelyben az idő nem transzformálódik:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (8)$$

Ha azt kívánjuk, hogy a fénysebesség a tapasztalatnak megfelelően invariáns legyen, akkor az ismert LORENTZ-féle transzformációt kell használnunk:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9)$$

A relativitáselmélet a mechanika és az elektrodinamika egyenleteinek igazi szimmetriáit kellő világításba helyezi és ma általában a klasszikus mechanika természetes továbbfejlődésének és nem ellentétének tekintik.

A relativitáselmélet egy általánosítása, az ú. n. általános relativitáselmélet a NEWTON-féle gravitáció módosított felfogásához vezetett.

EINSTEIN ezen gravitációelméletének alapgondolata a következő:

A tér, pontosabban a négydimenziós tér-idő halmaz egy görbülettel bíró RIEMANN-féle tér. A tömegpont e tér geodetikus görbéin mozog, úgy, mint ahogy egy olyan tömegpont, amely görbült felületen kénytelen mozogni és erő nem hat rá, szintén a felület geodetikus görbéin mozog. A tér görbültségi viszonyait az anyag eloszlása és mozgási állapota határozza meg, úgy, mint a klasszikus elméletben a sűrűség a potenciált a POISSON-féle egyenlet segítségével határozza meg. Pontosabban a gondolatmenet a következő:

A sűrűség helyébe lép egy másodrendű tenzor, az energia-impulzus tenzor. Másrészt a tér-időhalmaz görbültségi viszonyait meghatározzák az ívelem:

$$ds^2 = \sum_{i, k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k \quad (10)$$

együtthatói, a g_{ik} -k. Ezek egy másodrendű tenzort képeznek. Még egy másodrendű tenzor képezhető az ívelem együtthatóiból és azok deriváltjaiból, a RIEMANN-féle görbülettenzor, az R_{ik} . A legegyszerűsített

rűbb feltevés, hogy az energiaimpulzus tenzor T_{ik} , a g_{ik} és R_{ik} közt lineáris összefüggés áll fenn:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \kappa T_{ik}, \quad (11)$$

hol R az invariants görbület. Ez az egyenlet a Poisson-féle egyenlet általánosításának tekinthető, melybe határesetben át is megy.

Az elmélet a következő eredményekhez vezet:

Számot ad a Merkúr periheliumának mozgásáról, a Nap mellett elhaladó fénysugarak eltérítéséről, a vöröseltolódásról. Megengedi a CORIOLIS- és centrifugális erők olyan értelmezését, amelynél mindegy, hogy a test forog vagy a mindenség forog körülötte.

Azonkívül igen jelentékeny kozmológiai lehetőségekre mutat rá. Így lehetséges, hogy a világtér véges, de határtalan és az is lehetséges, hogy a világtér méretei változnak.

Bármily nagy perspektívákat nyit is az általános relativitás-elmélet, azokban az esetekben, amelyekre a klasszikus mechanika vonatkozik, átmegy abba és így mint igen jó közelítést kiadja a NEWTON-féle gravitáció törvényét.

Mielőtt a mechanika egy másik elvi kibővítésével foglalkoznánk, néhány szóval megemlékezünk arról a fejlődésről, amely a szigorúan vett klasszikus mechanika határain belül NEWTON után végbement. Ez lényegében a matematikai módszerek kifejlődése és az általános formális törvényszerűségek felismerése volt. Ez egyrészt lehetővé tette a mechanika széleskörű alkalmazását, másrészt előkészítette általánosítások lehetőségét, amint azt a relativitás elméleténél láttuk. Ezek: a mechanika differenciál- és integrálvelei, az általános koordináták bevezetése a mozgásegyenletekben, a HAMILTON—JACOBI-féle elmélet, a kanonikus transzformációelmélet, a vektor- és tenzorkalkulus, az invariantselmélet és újabban pl. az ergod-elméletben operátor és mértékelméleti megfontolások.

Ezen formális fejlődés jelentősége kiderült akkor, midőn az újonnan felfedezett kvantumszerű jelenségeknek a mechanika általános rendszerébe való beillesztésének problémája felmerült.

A kvantumelmélet kiindult a fekete sugárzás energiaelosztása értelmezéseinek nehézségeiből, amelyek elhárítására vezette be PLANCK 1900-ban az energiakvantumokat mint egy ad hoc feltevést. De csakhamar kiderült, hogy ezek feltevése más jelenségek

értelmezésénél, mint a fotoelektromos effektus, specifikus hő, COMPTON-effektus, termékenynek, bizonyultak. 1912-ben BOHR-nak sikerült a spektrumok törvényszerűségeinek megfejtése avval a feltevessel, hogy az atomok csak diszkrét energiájú állapotokban létezhetnek, amely állapotban nem sugároznak, míg a sugárzás két állapot közti átmenet alkalmával jön létre a BOHR-féle frekvencia-tételnek megfelelően. Nemsokára FRANCK és HERTZ kísérletileg igazolták az elmélet alapfeltevéseit a róluk elnevezett kísérletekkel. Bár a kvantumelmélet alapfeltevésai idegen elemet képeztek a klasszikus mechanika és elektrodinamika rendszerében, az alapok tisztázását későbbre hagyva egy igen átfogó elmélet alakult ki, amely egész fizikai felfogásunkat átalakította. Már az elmélet fejlődésének ebben a stádiumában nélkülözhetetlennek bizonyultak az általános mechanika módszerei, így a HAMILTON—JACOBI-elmélet, a kanonikus transzformációk elmélete és a feltételesen periódikus rendszerek elmélete.

Miután ez az elmélet egyes konkrét esetekben, így a hélium-spektrum esetében elégtelennek bizonyult, az alapok tisztázása elkerülhetetlenné vált. Sikerült is néhány rövid év alatt 1925-től 1928-ig egy olyan elméletet felállítani, amely a kvantumszerű jelenségeket és a klasszikus mechanikát egységesen magába foglalja. Hogy ez lehetséges volt, az azon múltott, hogy a klasszikus mechanika alapjai annyira egészségesek, formális törvényszerűségei pedig általánosításokra annyira alkalmasak voltak. Hozzájárult ehhez, hogy a tiszta matematika olyan fogalmi segédeszközöket épített ki, amelyek a szükséges általánosítások megfogalmazását lehetővé tették. Ezek voltak: hiperkomplex számok, matrix-elmélet, sajátértékelmélet, operatorelmélet, ortogonális függvények elmélete, HILBERT-féle tér.

A kvantummechanika két különböző kiindulási pontból alakult ki. Az egyik, a HEISENBERG—BORN—JORDAN-féle matrixelmélet, az egyes fizikai mennyiségekhez, mint koordináta, impulzus, impulzusnyomaték, energia nem számokat, hanem matrixokat rendel. Az alapvető probléma a matrix diagonális alakra való transzformációja, a diagonális elemek az illető mennyiség lehetséges értékei. Minden matrix a koordináta és impulzus matrixaiból épül fel, amelyek nem cserélhetők fel és amelyekre a HEISENBERG-féle

relációk állanak fenn. A mechanika formális alaptörvényei, így a kanonikus egyenletek mint matrixegyenletek érvényben maradnak.

A másik kiindulási pont volt a klasszikus mechanika és a hullámok analógiája, amelyet DE BROGLIE kezdeményezése után SCHRÖDINGER épített ki egy elméletté. Kiindulásul szolgált a klasszikus mechanika HAMILTON—JACOBI-féle egyenlete. Ezt az egyenletet HAMILTON a távcsövek sugármenete tanulmányozásánál vezette be. Az egyenlet bizonyos felületeket szolgáltat, melyek ortogonális trajektoriái optikai esetben a fénysugarak, mechanikai esetben a tömegpont lehetséges pályái. A klasszikus mechanika ezáltal szoros analógiába jut a geometriai optikával. Amint ismeretes, a geometriai optika csak olyan viszonyok közt érvényes, midőn az elhajlás-jelenségektől eltekinthetünk, ellenkező esetben át kell térnünk a hullámoptikára, midőn a HAMILTON-féle egyenlet helyébe egy hullámegyenlet lép. Az analóg átmenet a mechanikában elvezet a klasszikus mechanikától a hullámmechanikához, a HAMILTON—JACOBI-féle egyenlettől a SCHRÖDINGER-féle egyenlethez. Míg a HAMILTON—JACOBI-féle egyenletet úgy nyerjük, hogy a HAMILTON-féle függvényben, azaz az összenergiának kifejezésében az impulzusok helyébe egy S koordináta függvénynek a megfelelő koordináta szerinti deriváltját tesszük:

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) &= E, & p_i &\rightarrow \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) &= E, \end{aligned} \quad (12)$$

addig a SCHRÖDINGER-féle egyenletet úgy nyerjük, hogy az impulzus helyébe egy operatort teszünk:

$$p_j \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad (13)$$

hol \hbar a PLANCK-féle állandó osztva 2π -vel, i az imaginárius egység, és az így nyert energiaoperatort egy ϕ koordinátafüggvényre alkalmazzuk:

$$H\left(q_j, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j}\right) \phi = E\phi. \quad (14)$$

Ezen egyenlet sajátfüggvényei szolgáltatják a stacionárius állapotok energiáit, a megfelelő sajátfüggvények pedig a rendszer állapotát jellemzik. A klasszikus esetnek megfelelő viszonyok közt a SCHRÖDINGER-féle egyenlet át megy a HAMILTON—JACOBI-féle egyenletbe.

Kiderült, hogy a hullámmechanika és a matrixmechanika egy elmélet két különféle alakja. A SCHRÖDINGER-féle egyenletnek megfelel az az egyenlet, mely az energiamatrix főtengelekre való transzformációját fejezi ki,

$$S^{-1}HS = W, \quad (15)$$

hol S a transzformációs matrix, S^{-1} a reciproka. Ha az egyenletet S -sel elülről szorozzuk, az egyenlet alakja lesz

$$HS = SW, \quad (16)$$

midőn az analógia még nyilvánvalóbb. A transzformációs matrix oszlopainak a SCHRÖDINGER-egyenlet sajátfüggvényei felelnek meg.

Ha röviden akarjuk jellemezni a különbséget a klasszikus mechanika és a kvantummechanika közt, úgy azt mondhatjuk, hogy az előbbi differenciálegyenleteket ad meg a fizikai mennyiségekre, amelyekből azok mint az idő függvényei meghatározhatók, addig a kvantummechanika a fizikai mennyiségekhez operatorokat (ill. matrixokat) rendel. Két főprobléma merül itt fel. Az egyik, milyen értékeket vehet fel valamely mennyiség? Erre a felelet, hogy az operator saját értékeit. A másik probléma az, ha valamely állapot jellemezve van azáltal, hogy az összes egyszerre megmérhető mennyiségeket megadjuk, egy más méréshez tartozó mennyiség meghatározott értékét milyen valószínűséggel fogja felvenni? Azok a fizikai mennyiségek, amelyek cserélhető operatorokhoz tartoznak, ugyanazon állapotban mérhetők, míg a fel nem cserélhető operatorok, mint koordináta és sebesség, ugyanazon állapotban nem mérhetők. Ez azután odavezet, hogy egy mechanikai rendszernek nem határozható meg annyi jellemző adata, hogy a kezdeti állapotból a jövőt egyértelműen meg lehessen határozni. Tehát nem lehetséges egy rendszer állapotának olyan szoros determinálása az egy időben megadott helyzetekkel és impulzusokkal, mint a klasszikus mechanikában, aminek LAPLACE adott jellemző kifejezést.

Ez kétsésgkívül nagy elvi eltávolodás a klasszikus mechanikától, ami atómi folyamatoknál fontos és ellenőrizhető következtetésekre is vezet, de érintetlenül hagyja a klasszikus mechanika elgondolásait makroszkópikus viszonyok közt, pl. a csillagok pozíciójának kiszámítása egy későbbi időpontra nem szenved változást.

Az elmélet további fejlődésénél a relativitáselmélet szempontjai itt is igen termékenynek bizonyultak és elvezettek az elektron DIRAC-féle egyenletéhez, amellyel az elektron viselkedését és sajátosságait, beleértve a spint is, legpontosabban tudjuk leírni és amely olyan feltűnő jelenségekről, mint a párképződésről is felvilágosítást tud adni.

Nem lehet célunk a kvantummechanika teljesítményeinek felsorolása, mert ez a fizika ma aktuális problémái túlnyomó részét magában foglalná. Csak azt említjük meg, hogy az elektron hullámtermészetének kísérleti kimutatása éppúgy lehetséges, mint a fénynél és a fennálló hullám-korpuszkula dualitás egy alapvető kísérleti tény.

Azonban ma ismét az a helyzet, hogy élénk szükségét érezzük annak, hogy túlhaladjuk ismereteinknek a kvantummechanika által jellemzett fokát. A korpuszkula-hullám dualitás általános megalapozása, az elektromágneses tér kvantumelmélete, az atommagok alkatrészei, a protonok és neutronok közt működő erők, az elemi részek problémái egy további elmélyítés szükségére utalnak. Ez irányban igen jelentékeny kezdeményezések és részletteredmények vannak, de az elmélet súlyos nehézségekkel küzd, mutatva, hogy még lényeges gondolatok hiányzanak. Ez az ú. n. második kvantálás elmélete, amelyhez tartozik a kvantumelektrodinamika is, amely a klasszikus MAXWELL-féle elmülethez úgy viszonylik, mint a kvantummechanika a klasszikus mechanikához. A második kvantálás elmélete rendkívül messze távozik ugyan minden köznapi elgondolástól és a klasszikus mechanikától is, de a mechanika formális elvei itt is vezetőül szolgálhatnak és ismét az alapok helyességét igazolják.

A második kvantálás elmélete általában nehezen hozzáférhető és azért a fizikusok körében is kevésbbé ismert, mint megérdemelné. Ez annál inkább sajnálatos, mert itt vannak a ma aktuális legfontosabb elvi problémák. Ezért néhány szóval

megkísérlem általánosságban jellemezni, hogy az érdeklődést reá irányítsam.

Az alapgondolat a következő: Adva van valamely téregyenlet vagy egyenletek rendszere, pl. a MAXWELL-féle egyenletek, a SCHRÖDINGER-féle vagy DIRAC-féle egyenlet. Ezekben előfordul egy vagy több függvény: elektromos és mágneses térintenzitás, ψ függvény stb., mint a hely és idő függvényei. Az egyenletek ekvivalensek egy HAMILTON-féle variációelvvel, amelynek LAGRANGE-függvénye a térfüggvényeket és azok idő és koordináták szerinti első deriváltjait tartalmazza. A pontmechanika koordinátáinak itt a térfüggvények felelnek meg és ezek szerint variálunk, midőn a nyert LAGRANGE-egyenletek éppen a téregyenletek lesznek. Ismert formalizmus, t. i. egy LEGENDRE-transzformáció megengedi, hogy a LAGRANGE-függvényből áttérjünk a HAMILTON-féle függvényre és a kanonikus egyenletekre. Ez eddig még mindig klasszikus elmélet. Kvantumelméletre úgy térünk át, hogy a koordináták analogonjai és a hozzájuk definiált és a formalizmus által előírt kanonikusan konjugált impulzusokat operatoroknak tekintjük, melyekre jellemző felcserélési relációk állanak fenn, még pedig a HEISENBERG-féle relációk a BOSE—EINSTEIN és egy előjelben különböző relációk a FERMI—DIRAC-féle esetben.

Ha az egyenlet, amelyből kiindultunk, egy már kvantálás által nyert egyenlet, mint a SCHRÖDINGER- vagy DIRAC-féle egyenlet, akkor ez az eljárás a kvantálás másodszori alkalmazását jelenti, innen az elmélet elnevezése.

Az elmélet igen szép eredményekhez vezet és pl. üres elektromágneses tér esetében tökéletes: kiadja a fotonok jellegzetes sajátságait, azaz hogy a tér energiája és impulzusa úgy adódik, mint korpuszculák energiái és impulzusainak összege. A nehézségek ott kezdődnek, ha töltések vannak jelen, ekkor divergens kifejezések lépnek fel.

Hasonlóan kiadja a SCHRÖDINGER-egyenletre alkalmazva, hogy a töltések egy elemi töltés sokszorosai. Tehát a fény és a töltések korpuszculáris sajátságai egy kvantálás eredményei.

Ezen gondolatkörben próbálják a mezonok elméletét is felépíteni.

Ha az itt vázolt fejlődést végigtekintjük, úgy azt a benyomást

nyerjük, hogy tudásunknak elég jól elkülöníthető fokozatai, emeletei vannak. Az újkori tudományos fellendülés egy ilyen emeletet megnyitott számunkra és NEWTON volt az, ki először tudta áttekinteni ezen emelet viszonyait és akilehetővé tette ezáltal, hogy meglássuk azt a lépcsőt, amely ezen emeletről a következőre felvezet. Egy következő emeletet az elektrodinamikának MAXWELL-féle elmélete és a relativitás elmélete jellemez és az ezekben előforduló univerzális állandó, a fénysebesség c . A következő a kvantumelmélet emelete, a jellemző univerzális állandó a PLANCK-féle állandó, a h .

Mindezekhez az út a klasszikus fizikán át vezet, sohasem tudtuk volna magunkat az elektrodinamika és a kvantummechanika jelenségei közt kiismerni, ha a klasszikus fizika iskoláján nem mentünk volna át.

Reméljük, hogy megadatik nekünk, hogy amaz új emeletbe, amelynek ajtain kissé be tudunk pillantani, valóban be is tudjunk lépni. És ha ez sikerülni fog, akkor is hálával kell emlékeznünk arra a NEWTONra, aki egy alsóbb emeleten megtanított arra, hogy mi egy tudományos rendszer.

Ortway Rudolf.

ISAAK NEWTON UND DIE WISSENSCHAFT DER GEGENWART.

ANLÄSSLICH DER 300. JAHRESWENDE SEINER GEBURT.

Im ersten Teil wird die Bedeutung von NEWTON's Auftreten zu schildern versucht. Seine Bedeutung lag nicht so sehr darin, dass er total neue, bishin ungehörte Gedanken fasste, sondern darin, dass er aus den Bestrebungen seiner Zeit das Richtige erkannte und zu einer Einheit verband, das Unrichtige abwies. Wo andere Ansätze machten, drang er bis zum entscheidenden Punkt vor; wo andere vermuteten, bewies er.

Infinitesimale Betrachtungen waren bei den besten Köpfen seiner Zeit verbreitet, aber das Gemeinsame der Probleme erkannten zuerst und unabhängig voneinander LEIBNIZ und NEWTON.

Die Grundlagen der Mechanik hat GALILEI weitgehend geklärt und DESCARTES das sogenannte erste Axiom auch klar ausgesprochen, aber erst NEWTON hat die Prinzipien der Mechanik in einer Vollständigkeit zusammengefasst, dass es bis heute die Grundlage dieser Wissenschaft bildet.

Das Gesetz der Gravitation wurde auch von mehreren, so von KEPLER und HOOKE vermutet, aber NEWTON bewies zuerst, dass das Gesetz aus den empirischen KEPLER'schen Gesetzen eindeutig folgt, und umgekehrt, gilt das Gravitationsgesetz, so folgen die KEPLER'schen Gesetze. In seinem Hauptwerke, der *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* führt er weiterhin den gewaltigen Bau seiner Mechanik auf. Er bestimmt die Abhängigkeit der Schwere von der geographischen Breite, die Gestalt rotierender Himmelskörper, die Anziehung ausgedehnter Massen. Er erklärt einige wichtige Störungen des Mondes, so die Variation, die Bewegung der Knotenlinie und der Apsiden der Mondbahn. Weiterhin erklärt er die Präzession der Nachtgleichen und gibt die Bestimmung einer Kometenbahn aus drei Positionsbestimmungen an. Ausser Probleme der Himmelsmechanik behandelt er die Bewegung der Flüssigkeiten mit Reibung und die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Seine optische Untersuchungen haben wichtige Eigenschaften des Lichtes festgestellt, so die verschiedene Brechbarkeit der Farben, als auch die periodische Eigenschaften der Lichtstrahlen, aber seine theoretischen Ansichten in der Optik waren nicht von gleicher Bedeutung wie in der Mechanik, sogar in mancher Beziehung hemmend.

In einem zweiten Teil wird zu zeigen gesucht, dass die Physik der Gegenwart trotz weitreichender neuen Gesichtspunkte durchaus auf NEWTON'scher Grundlage steht.

So wird oft die Feldtheorie des Elektromagnetismus als eine Überwindung des mechanistischen Standpunktes angeführt. Das gilt aber nur, insofern wir den Begriff der Mechanik zu eng fassen. Der Begriff des Feldes ist eine natürliche Weiterentwicklung der Idee der Fernkräfte und tritt schon in der klassischen Potentialtheorie auf. In der eigentlichen Feldtheorie wird dem Feld eine gewisse Selbstständigkeit zugeschrieben. Dass die Feldtheorie eine Weiterentwicklung der klassischen Mechanik ist, zeigt sich auch darin, dass die charakteristische Begriffe der Mechanik, wie Energie, Impuls, Impulsmoment, Spannung auf das Feld sinngemäss übertragen werden können, und die MAXWELL'schen Gleichungen auch in der Form der mechanischen Grundgleichungen, etwa in der HAMILTON'scher kanonischer Form geschrieben werden können.

Die Entwicklung der Mechanik verlief zuerst streng in Rahmen der NEWTON'schen Mechanik, wobei die mathematischen Methoden und die formale Seite der Theorie durch EULER, LAGRANGE, LAPLACE, HAMILTON, JACOBI und andere ausgebildet wurden. Dadurch wurde ermöglicht, dass die Mechanik auch inhaltlich verallgemeinert werden konnte, als neue Tatsachen eingeordnet werden mussten. So haben in der Relativitätstheorie, in der Quantenmechanik und neuerdings in der Quantentheorie der Wellenfelder (d. h. in der Quantenelektrodynamik und zweite Quantellung) die formalen Gesetze der klassischen Mechanik die Möglichkeit einer sachgemässen Verallgemeinerung geliefert und dadurch den hohen Wert und lebendige Wirksamkeit der Grundlagen erst ins rechte Licht gestellt.

R. Ortway.

INTENZITÁSELOSZLÁS AZ AgH MOLEKULA $^1\Sigma - ^1\Sigma$ PERTURBÁLT SÁVRENDSZERÉBEN.

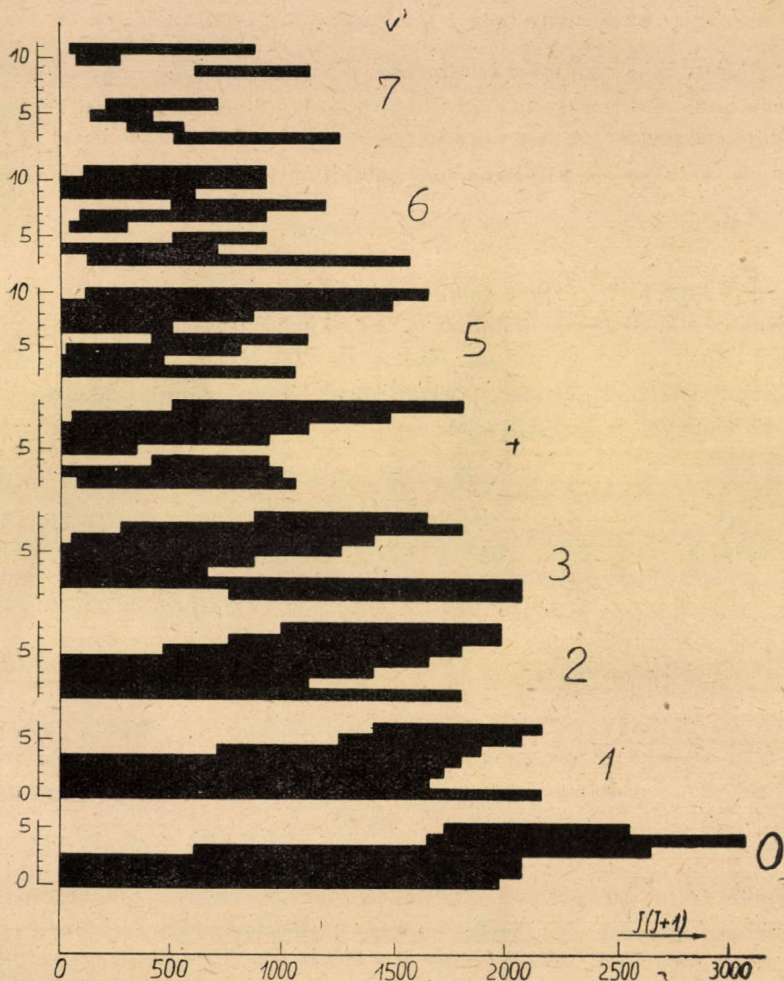
Bevezetés.

BENGTSSON és OLSSON¹ az AgH molekula szinképéről szóló munkájukban a 3180 és 4700 Å között fekvő $^1\Sigma - ^1\Sigma$ sávrendszer 27 sávjának rotációs vizsgálatát végezték el. Dolgozatukban a sávok mérési adatait nem közlik, hanem csupán az alap és felső állapot rezgésnívóinak különbségeit, kombinációs különbségeket és rotációs állandókat adnak meg. Megjegyzik, hogy míg az alsó $^1\Sigma$ állapot egész rendesen viselkedik, addig a felső $^1\Sigma$ állapot egészen rendkívüli tulajdonságokkal rendelkezik. Mi ezen tulajdonságok közül csupán a rendkívül különös intenzitás-eloszlást emeljük ki, mert éppen ez készítette arra őket, hogy csak a fent említett 27 sávot vizsgálják meg részletesen.

Újabban GERŐ és SCHMID² végeztek kutatásokat az AgH molekula szinképére vonatkozólag és a $^1\Sigma - ^1\Sigma$ rendszer 60 sávjának vizsgálatát adják. Megállapításuk szerint az intenzitás eloszlása egészen szokatlan. Vannak sávok, amelyek $J=0$ rotációs kvantumszámnál kezdődnek és csak egészen alacsony rotációs kvantumszámokig követhetők. Mások viszont közepes rotációs kvantumszámoktól egészen magas rotációs kvantumszámokig mérhető intenzitással rendelkeznek. Néhány sáv van csak, amelynek mind alacsony, mind magas rotációs kvantumszámnál vannak vonalai. Az 1. ábrán minden egyes (v' , v'') vibrációs kvantumszám-párnak megfelelő helyen a fekete sáv azon $J(J+1)$ helye-

¹ E. BENGTSSON u. E. OLSSON, Zeitschr. f. Phys. 72, 163 (1931).

² Megjelenés alatt álló cikk a Zeitschr. f. Phys.-ben.



1. ábra.

ket fed, amelyeknek megfelelő J -nél a sáv vonala mérhető intenzitással rendelkezik. GERŐ és SCHMID vizsgálatai szerint erős homogén perturbáció van jelen. A jelen dolgozat feladata, hogy világot vessen arra a kérdésre, hogy egy homogén perturbáció miképpen befolyásolja az intenzitáseloszlást.

1. §. A heterogén- és homogén perturbációk.

Mielőtt az intenzitásviszonyok részletesebb tárgyalásába bocsátkoznánk, célszerű lesz a heterogén és homogén perturbációk közti alapvető különbségekre rámutatni.

A kétatomos molekula egy stacionárius állapotát jellemezzük a

$$\Psi = \Phi(x_i, y_i, z_i; r) R(r) u(\theta, \omega) \quad (1)$$

sajátfüggvénnyel. Ha a sajátfüggvényt ilyen szorzatalakban tételizzük fel, akkor a kétatomos molekula hullámegyenlete, mint azt BORN és OPPENHEIMER, KRONIG és VAN VLECK³ megmutatták, bizonyos tagok elhanyagolása árán három részre választható szét, melyek a következők:

$$(\mathbf{H}_0 - W_0) \Phi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 M r^2} \left[\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{cosec}^2 \theta \left(\frac{\partial}{\partial \omega} - i \Omega \cos \theta \right)^2 \right] u + W_{\text{rot}} u = 0 \quad (3)$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 M r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + [W - W'_0(r) - W_{\text{rot}}(r)] R = 0. \quad (4)$$

Itt x_i, y_i, z_i az i -edik elektron koordinátái, r a magok távolsága, θ és ω a magokat összekötő tengely helyzetét egy a térben fix koordináta-rendszerben meghatározó polár és azimut szögek.⁴ M jelenti a magok $\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ redukált tömegét. \mathbf{H}_0 a stacionárius molekula lehetséges energiaértékeit meghatározó energiaoperátor, W_0 pedig ennek sajátértéke. W_{rot} az energiának a rotációtól eredő része és W'_0 -be belefoglalva gondoljuk W_0 -t és (6)-nak azon részét, mely az elektron-kvantumszámok-

³ M. BORN u. R. OPPENHEIMER, Ann. der Phys. **84**, 457 (1927); R. de L. KRONIG, Zeitschr. f. Phys. **46**, 814; 50, 347 (1928); J. H. VAN VLECK, Phys. Rev. **33**, 467 (1929).

⁴ Az egyenletek egy olyan térben fix rendszerre vonatkoznak, melynek kezdőpontja a magok tömegközéppontjával esik egybe. A molekula tömegközéppontja és a magok tömegközéppontja közti különbséget elhanyagoljuk.

kal kapcsolatos frekvenciák feletti átlagolásnál el nem tűnik, tehát az első és harmadik tagból származó tagokat W a teljes energia.

Az elhanyagolt tagokat két részre szokás bontani:

$$\frac{\hbar^2 i}{8\pi^2 M r^2} \left[\cotg \theta (\mathbf{P}_x - i \mathbf{P}_y \mathbf{P}_z - i \mathbf{P}_z \mathbf{P}_y) + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{cosec} \theta \mathbf{P}_y \frac{\partial}{\partial \omega} + 2 \mathbf{P}_x \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \psi, \quad (5)$$

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 M r^2} \left[(\mathbf{P}_x^2 + \mathbf{P}_y^2) \Phi - 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2r^2}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] R.u \quad (6)$$

A \mathbf{P}_z operátor megfelel a z tengely, azaz a magokat összekötő tengely körüli teljesen összekapcsolt pálya- és spinimpulzusmomentumnak. \mathbf{P}_x és \mathbf{P}_y hasonló jelentéssel bírnak. Mint látjuk, az (5) részben eltekintve \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y , \mathbf{P}_z -től csupán a θ , ω polár-, illetve azimut-szögek, a (6) részben pedig csak a mag-távolság szerepel.

Sok esetben a (2), (3), (4) egyenletek megoldásaként adódó energiakifejezés helyes eredményt ad. Mégis előfordulnak esetek, amikor jelentős eltérések lépnek fel a tapasztalat és a számított értékek között. Az összhangot ekkor is vissza lehet állítani, ha az (5) és (6) alatt lévő elhanyagolt tagokat a perturbációs számítás módszereivel tekintetbe vesszük.

Perturbáció azonban nem lehetséges két tetszésszerű állapot között. Az (5) és (6) alatt elhanyagolt tagok matrixelemeit kiszámítva KRONIG³ a következő kiválasztási szabályokat állapította meg:

- 1) A két egymást perturbáló állapot J rotációs kvantumszáma ugyanaz.
- 2) A két állapot sajátfüggvénye egyformán vagy pozitív vagy negatív.
- 3) A két elektronállapot spinmultiplicitása megegyező.⁵
- 4) A két elektronállapot A kvantumszáma legfeljebb egy egységben különbözhet. $\Delta A = 0, \pm 1$.

⁵ Ez a szabály szigorúan csak akkor érvényes, ha az egyes elektronok spinje és pályaimpulzusmomentuma közötti kölcsönhatást elhanyagoljuk. A. Budó u. I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. 109, 393 (1938).

- 5) Egyforma magok esetén a két állapot egyformán vagy szimmetrikus vagy antiszimmetrikus a magok felcserélésére nézve.

A 4) feltétel szerint a két egymást perturbáló állapot A kvantumszáma vagy egy egységben különbözik $\Delta A = \pm 1$ vagy egymással megegyezik $\Delta A = 0$. Az első esethez tartozó perturbációkat szokták heterogén vagy DIEKE nyomán A osztályú perturbációknak, míg az utóbbiakat homogén vagy B osztályú perturbációknak nevezni.⁶ A két perturbációs jelenség jellegzetesen különbözik egymástól.

A nem degenerált termekre vonatkozó perturbációs számítás módszereit követve legyenek az egymást perturbáló állapotok sajátfüggvényei és energiaértékei a perturbáció előtt

$$\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0, \dots; \quad E_1^0, E_2^0, E_3^0, \dots$$

és a perturbáció után

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots; \quad E_1, E_2, E_3, \dots$$

Ekkor a perturbált és perturbálatlan mennyiségek a következőképpen függnek össze:

$$\psi_n = \psi_n^0 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{H_{in}}{E_n^0 - E_i^0} \psi_i^0 \quad (7)$$

$$E_n = E_n^0 + H_{nn} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{|H_{ni}|^2}{E_n^0 - E_i^0}. \quad (8)$$

A fenti értékek a sajátfüggvényekre az első, az energiaértékekre a második közelítést adják. A fenti kifejezésekben szereplő H_{ni} mennyiségek a H perturbációs operátor matrixelemei

$$H_{ni} = \int \psi_n^{0*} H \psi_i^0 d\tau. \quad (9)$$

Látjuk, hogy az energianívóknak a perturbáció miatt bekövetkezett eltolódása jelentős mértékben függ a perturbációs matrixelem nagyságától.

⁶ R. S. MULLIKEN, Journ. of Phys. Chem. **41**, 159 (1937).

Heterogén perturbációknál ($\Delta l = \pm 1$) az (5) alatt elhanyagolt tagokat kell tekintetbe venni. Ezeknek a tagoknak az esetében a matrixelemek rotációs állandó nagyságrendűek s így (8) szerint észrevehető perturbáció csak az energiakülönbségek kicsinnyéválása esetén ú. n. keresztezési helyek környezetében lép fel. Ekkor azonban a fenti, nem degenerált termekre vonatkozó perturbációs eljárás nem alkalmazható. Most azonban a két egymást perturbáló állapot kölcsönhatása mellett az energia szempontjából távolabb eső állapotok perturbáló hatása elhanyagolható s így bizonyos mértékig egyszerűbb lesz a probléma.

A két egymást perturbáló állapot sajátfüggvénye legyen a perturbáció előtt Ψ_1^0 és Ψ_2^0 és a perturbáció után Ψ_1 és Ψ_2 . A nekik megfelelő energiaértékek pedig E_1^0 és E_2^0 , illetve E_1 és E_2 . Legyen H_{12} az (5) alatti tagok matrixeleme. Tegyük fel továbbá, hogy $H_{11} = H_{22} = 0$, ami, ha az energianívókra való triviális eltolódást tekintetbe vettük, akkor nem jelent lényeges korlátozást. Ezek tekintetbevételével a perturbált energianívók:

$$E_{1,2} = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} \pm \left(|H_{12}|^2 + \left(\frac{E_2^0 - E_1^0}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

és, ha az energiaértékek eltolódása abszolút értékben

$$\varepsilon = \left(|H_{12}|^2 + \left(\frac{E_2^0 - E_1^0}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{E_2^0 - E_1^0}{2} \quad (11)$$

a perturbált hullámfüggvények:

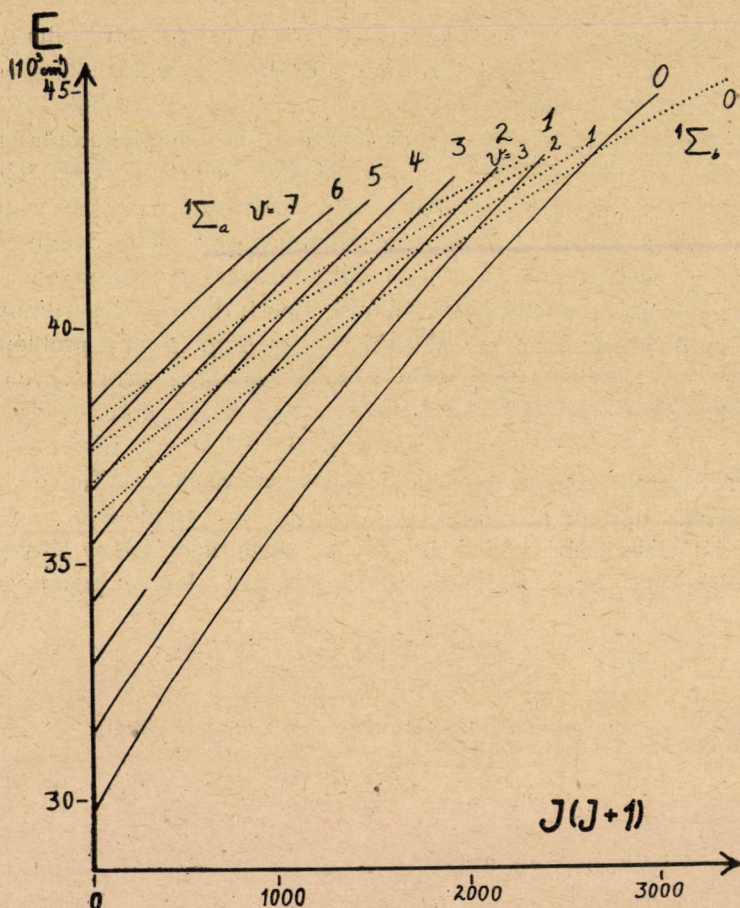
$$\Psi_1 = \frac{|H_{12}|}{(|H_{12}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\Psi_1^0 - \frac{\varepsilon}{H_{12}} \Psi_2^0 \right) \quad (12a)$$

$$\Psi_2 = \frac{|H_{12}|}{(|H_{12}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\Psi_2^0 + \frac{\varepsilon}{H_{12}^*} \Psi_1^0 \right). \quad (12b)$$

Mint az a (10) képletből könnyen belátható, az eltérés a perturbálatlan nívók számtani közepére vonatkoztatva teljesen

⁷ J. H. Van VLECK, Journ. of Chem. Phys. 4, 327 (1936).

⁸ A perturbálatlan és perturbált állapotok közül az 1 indexszel jelölt legyen a kisebb energiaértékkel bíró. $E_1^0 = E_2^0$ helynek, a keresztezés helyének kivételével a perturbálatlan és perturbált állapotok megfeleltetését pontosan definiáltuk.



2. ábra.

szimmetrikus és abszolút értéke a keresztezés helyén éppen $|H_{12}|$.⁹ Jellemző még ezen heterogén perturbációra, hogy $J=0$ rotációs kvantumszámnál a perturbált energianívó átmegy a neki megfelelő perturbálatlan nivóba, magas rotációs kvantumszámoknál pedig marad egy kevés perturbáció.

Homogén perturbációk ($\Delta A=0$) esetén Van VLECK⁷ szerint a perturbáció nagyságára a (6) alatt elhanyagolt tagok matrix-

⁹ I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. 106, 431 (1937).

elemei mérvadók. Mint idézett cikkében megmutatja, ezeknek a matrixelemeknek a nagyságrendje a vibrációs frekvenciák négyzetgyökének nagyságrendjébe esik. Ebben az esetben észrevehető perturbáció léphet fel akkor is, ha minden J rotációs kvantumszámnál az energianívók távolsága jelentős. Ekkor (8) szerint a perturbáció a perturbálnak a perturbálatlanhoz képest éppen a perturbálóval ellentétes irányba való egyirányú eltolódásában nyilvánul meg.

Igen sok esetben az egymást perturbáló energianívók közel kerülnek egymáshoz, mikor is a rotációs termsorok metszik is egymást. A 2. ábra mutatja az AgH molekula esetében a perturbálatlan energianívók menetét. Szokás szerint a rotációs termsorokat a $J(J+1)$ függvényeként mértük fel. Ebben a koordináta-rendszerben a termsorokat az egyenestől kevéssé eltérő parabolák fogják ábrázolni. Első pillantásra is két lényegesen különböző helyet találunk az ábrán: 1) Vannak olyan rotációs kvantumszámok, amelyekhez tartozó energianívók távolsága egyenlő nagyságrendű. Ebben az esetben alkalmazhatók a (7), (8) alatti képletek és a viszonyokat ezek alapján tekinthetjük át. 2) A keresztezési helyeken és ezek közelében a két egymást metsző termsor egyenlő rotációs kvantumszámú nívóinak kölcsönhatása mellett a többi tag hatása elhanyagolható. Az esetet a (10), (11), (12) képletek jellemzik, csak bennük H_{13} a (6) alatt elhanyagolt tagok matrixelemét kell, hogy jelentse. Ez a szétválasztás azonban csak első közelítésben lehetséges, mert a többi nívó sem elhanyagolható a perturbációs matrixelemek nagysága miatt.

2. §. A Franck—Condon elv.

A FRANCK—CONDON elv¹⁰ lehetővé teszi, hogy a kétatomos molekula két különböző elektronállapotának vibrációs nívói közti átmeneti valószínűséget kiszámíthassuk. Az elv mind klasszikus, mind kvantummechanikai alakjának alapfeltevése az, hogy a magok vibrációs állapotainak az elektronállapotok megváltozá-

¹⁰ J. FRANCK, Zeitschr. f. Phys. Chem. **120**, 144 (1926); E. U. CONDON, Phys. Rev. **28**, 1182 (1926).

sával összefüggő változása egyedül csak a magoknak a két állapotban végzett mozgásától függ.

A klasszikus alakban ennek magyarázatára felemlíthetjük, hogy a magok tömege sokkal nagyobb az elektronok tömegénél s így ezek mozgásállapotának megváltozása nagy tehetetlenségük folytán az elektronok «ugrása» alatt gyakorlatilag elhanyagolható. Így csak két olyan vibrációs nivå között lesz jelentős átmenet, melyekben ugyanazon magtávolsághoz ugyanazon mozgási állapot tartozik. A molekulák a leghosszabb ideig a zérus sebességű legkisebb és legnagyobb magtávolságú állapotban, illetve azok közelében tartózkodnak s így a megegyező maximális, illetve minimális magtávolsággal rendelkező állapotokat ki-keresve a két elektronállapot maximális intenzitású vibrációs átmeneteit megkaphatjuk.

A kvantummechanika szerint a két állapot között az átmeneti valószínűség az elektromos dipólusmomentum matrixelemeitől függ. Az elv lényeges feltevése most már az, hogy a matrixelemek számításakor csak a tisztán a magok koordinátáitól függő részt kell tekintetbe venni s ezekre integrálni, a többi rész, mely a magok koordinátái mellett még más részecskék koordinátáit is tartalmazza és a magok koordinátáitól nem túl erősen függ, az integrálás szempontjából mint állandó kiemelhető.

Legyen Ψ_j és $\Psi_{j'}$ a kétatomos molekula két stacionárius állapota. A kvantummechanika szerint ezen két állapot közti spontán átmenet esetén a másodpercenként kisugárzott energia

$$I_{jj'} = N_j \frac{64\pi^4 \nu_{jj'}^4}{3c^3} |\mathfrak{P}(j; j')|^2 \quad (13)$$

ahol N_j a molekulák száma a felső j állapotban, $\nu_{jj'}$ a kisugárzott hullám frekvenciája, $\mathfrak{P}(j; j')$ pedig az elektromos dipólusmomentum matrixeleme:

$$\mathfrak{P}(j; j') = \int \Psi_j^* \sum_t e_t \mathbf{r}_t \Psi_{j'} d\tau \quad (14)$$

e_t az t -edik részecske töltése, \mathbf{r}_t pedig a rádiuszvektora. A \sum_t összegezést minden részre, tehát elektronokra és atommagokra egyaránt ki kell terjeszteni. Az integrálás a koordináták összes

lehetséges értékeire végzendő. Tárgyalásunkban elhanyagoljuk a spint, tehát csak szingulett, illetőleg olyan állapotokra szorítkozunk, amelyeknél a multiplett-felbomlástól eltekinthetünk.

Mint az 1. §-ban láttuk, a kétatomos molekula sajátfüggvénye az (5) és (6) tagok elhanyagolása árán felbontható két sajátfüggvény szorzatára, melyek közül az egyik $R.u$ csak a magok koordinátáitól függ, a másik Φ pedig az elektronok koordinátái mellett még a magtávolságokat is tartalmazza mint paramétert. Bontsuk fel a sajátfüggvények fenti felbontásának megfelelőleg az elektromos dipólusmomentum vektorát két részre:

$$\sum_i e r_i = e \sum_k r_k + \sigma r_m. \quad (15)$$

Az első rész, melyben e az elektron töltése és r_k a k -adik elektronhoz vont rádiuszvektor, az elektronoktól eredő dipólusmomentum, független a magok helyzetétől; a második rész, melyben r_m a két magot összekötő vektor és σ egy csak a magok töltésétől függő állandó, a magok hozzájárulása az eredő dipólusmomentumhoz. Képezzük az elektromos dipólusmomentum matricelemét (1) és (15) segítségével:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(j; j') = & \int R_j(r) u_j(\theta, \omega) R_{j'}(r) u_{j'}(\theta, \omega) d\tau' \int \Phi_j^* e \sum_k r_k \Phi_{j'} d\tau'' + \\ & + \int \Phi_j^* \Phi_{j'} d\tau'' \sigma \int R_j(r) u_j(\theta, \omega) r_m R_{j'}(r) u_{j'}(\theta, \omega) d\tau'. \end{aligned} \quad (16)$$

Itt $d\tau'$, $d\tau$ -nak csak az atommagok koordinátáitól függő része, $d\tau''$ pedig csak az elektronok koordinátáit tartalmazza. Az összességben különböző elektronállapotok esetén a második tag a sajátfüggvények ortogonalitása folytán eltűnik s így lesz végül például

$$\mathfrak{P}_x(j; j') = \int u_j(\theta, \omega) u_{j'}(\theta, \omega) \cos \theta d\tau''' \int R_j(r) \mathfrak{P}_{jj'}(r) R_{j'}(r) r^2 dr \quad (17)$$

ahol

$$\mathfrak{P}_{jj'} = e \int \Phi_j^* \sum_k r_k \Phi_{j'} d\tau'' \quad (18)$$

és $d\tau'''$ a θ és ω -tól függő rész. Mint ismeretes az első integrál csak abban az esetben nem tűnik el, ha a két nívó rotációs kvantumszáma egy egységgel különbözik.

A második integrál, mint GIBSON, RICE és BAYLISS¹¹ meg-

¹¹ G. E. GIBSON, O. K. RICE and N. S. BAYLISS, Phys. Rev. **44** 193 (1933).

mutatták, a J rotációs kvantumszámtól gyakorlatilag nem függ s így egyszerűbb esetekben nem szükséges külön minden rotációs kvantumszámra az intenzitás kiszámítását elvégezni, hanem elég $J=0$ -ra kiszámítani az ú. n. vibrációs intenzitáseloszlást.

A kisugárzott $\nu_{jj'}$ frekvenciájú energia (13) és (16)-ra tekintettel

$$I_{jj'} = CN_j \nu_{jj'}^4 \left| \int R_j(r) R_{j'}(r) r^2 dr \mathfrak{P}_{jj'}(r) \right|^2.$$

Itt C egy ismeretlen állandó.

A FRANCK—CONDON elv feltevése szerint $\mathfrak{P}_{jj'}(r)$ az $R_j(r)R_{j'}(r)r^2$ szorzathoz képest olyan lassan változik r -rel, hogy az integrál szempontjából állandónak tekinthető és az integrál jele elé véve a C állandóba olvasható. Tehát így sikerült különböző elektronállapotok vibrációs nívói közti átmenetek relatív intenzitásainak meghatározását két vibrációs sajátfüggvény szorzatintegráljának meghatározására visszavezetni. Ezen az alapon számosan számítottak intenzitáseloszlásokat.¹²

A következőkben vizsgálat tárgyává kívánjuk tenni, hogy hogyan alakul a FRANCK—CONDON elv alkalmazhatósága perturbációk esetében. Mint már az előző fejezetben végzett tárgyalás folyamán láttuk, két lényegesen különböző perturbációs eljárást kell alkalmazni a szerint, amint a megegyező rotációs kvantumszámok mellett az energianívók különbségei egyenlő nagyságrendűek és nagyok a perturbációs matrixelemhez képest 1), vagy két nívó különbsége a többihez és a matrixelemhez képest kicsiny 2) (keresztelési helyek környezetében). Legyen a felső Ψ_j' sajátfüggvénnyel jellemzett állapot a perturbációt szenvedő, míg az alapállapot, melyet a Ψ_j sajátfüggvénnyel jellemzünk, ne legyen perturbálva.

1) Ekkor (7) és (14) tekintetbevételével az elektromos dipólusmomentum matrixeleme a következő lesz:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(j; j') &= \int \Psi_j'^* \sum_i e_i r_i \Psi_j d\tau = \\ &= \int \Psi_j'^* \sum_i e_i r_i \Psi_j d\tau + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{H_{ij}}{E_j^0 - E_i^0} \int \Psi_j'^* \sum_i e_i r_i \Psi_i d\tau. \end{aligned}$$

¹² A. S. COOLIDGE, H. M. JAMES and R. D. PRESENT, Journ. of Chem. Phys. **4**, 193 (1936), W. FINKELNBURG, Zeitschr. f. Phys. **99**, 798 (1936); G. HERZBERG, Zeitschr. f. Phys. **61**, 604 (1930).

Az itt szereplő kifejezésben Ψ_j és a perturbáció előtti állapotra jellemző Ψ_{j^0} sajátfüggvények kielégítik az (5) és (6) tagok elhanyagolásával nyert hullámegyenletet és így három részre bonthatók és az integrálok a (16) és (17) alatt szereplő integrálokhoz hasonló módon kezelhetők. A számítások eredménye szerint¹³

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(j; j') = C_1 \int R_j(r) \mathfrak{P}_{j'0}(r) R_{j^0}(r) r^2 dr + \\ + C_2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{H_{ij}}{E_j^0 - E_i^0} \int R_j(r) \mathfrak{P}_{ji^0}(r) R_{i^0}(r) r^2 dr \end{aligned} \quad (19)$$

ahol $\mathfrak{P}_{ji^0}(r)$ a (18) alattihoz hasonló jelentéssel bír. Ismét feltehetjük, hogy ezeknek a $\mathfrak{P}_{ji^0}(r)$ mennyiségeknek a magtávolságtól való függése csekély és összevonva őket a C_1 és C_2 állandókkal, két ismeretlen állandót tartalmazó kifejezést nyerünk.

2) Ha két egymást perturbáló energianívó távolsága kicsiny a többi energianívó távolságához képest, akkor a viszonyok sokkal áttekinthetőbbek lesznek. (12) és (14)-re tekintettel az elektromos dipólusmomentum matrixelemei:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(j; j'_1) &= \frac{|H_{12}|}{(|H_{12}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\int \Psi_j^* \sum_i e_i r_i \Psi_{j'_1} d\tau - \frac{\varepsilon}{H_{12}} \int \Psi_j^* \sum_i e_i r_i \Psi_{j'_2} d\tau \right) = \\ &= \frac{|H_{12}|}{(|H_{12}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\mathfrak{P}(j; j'_1{}^0) - \frac{\varepsilon}{H_{12}} \mathfrak{P}(j; j'_2{}^0) \right). \\ \mathfrak{P}(j; j'_2) &= \frac{|H_{12}|}{(|H_{12}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\int \Psi_j^* \sum_i e_i r_i \Psi_{j'_2} d\tau + \frac{\varepsilon}{H_{12}^*} \int \Psi_j^* \sum_i e_i r_i \Psi_{j'_1} d\tau \right) = \\ &= \frac{|H_{12}|}{(|H_{12}|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\mathfrak{P}(j; j'_2{}^0) + \frac{\varepsilon}{H_{12}^*} \mathfrak{P}(j; j'_1{}^0) \right). \end{aligned}$$

Legyen γ a $\mathfrak{P}(j; j'_2{}^0)$ és $\mathfrak{P}(j; j'_1{}^0)$ vektorok által bezárt szög, akkor az intenzitásokat a következőképpen kapjuk:

¹³ Az összes lényeges perturbáló energianívók ugyanahhoz az elektronállapothoz tartoznak s így mivel a rotációs kvantumszám is ugyanaz, a C_2 állandó minden nívóra ugyanaz.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= C\nu_{j_1}^4 |\mathfrak{P}(j; j_1)|^2 = \\
 &= \frac{C\nu_{j_1}^4 |H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \varepsilon^2} \left\{ |\mathfrak{P}(j; j_1^0)|^2 + \frac{\varepsilon^2}{|H_{12}|^2} |\mathfrak{P}(j; j_2^0)|^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\varepsilon}{|H_{12}|} |\mathfrak{P}(j; j_2^0)| |\mathfrak{P}(j; j_1^0)| \cos \gamma \cos(\beta - \alpha) \right\}. \\
 I_2 &= C\nu_{j_2}^4 |\mathfrak{P}(j; j_2)|^2 = \\
 &= \frac{C\nu_{j_2}^4 |H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \varepsilon^2} \left\{ |\mathfrak{P}(j; j_2^0)|^2 + \frac{\varepsilon^2}{|H_{12}|^2} |\mathfrak{P}(j; j_1^0)|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\varepsilon}{|H_{12}|} |\mathfrak{P}(j; j_2^0)| |\mathfrak{P}(j; j_1^0)| \cos \gamma \cos(\beta - \alpha) \right\}.
 \end{aligned}$$

ahol α a H_{12} perturbációs matricelem fázisszöge, β pedig Ψ_1^0 és Ψ_2^0 sajátfüggvények fáziskülönbsége. Könnyen belátható a (9) képlet alapján, hogy ha ez a fáziskülönbség megváltozik, akkor a perturbációs matricelem fázisszöge is ugyanannyival változik meg, tehát a $\beta - \alpha$ különbség változatlan. Célszerű és ezen megfontolás alapján helyes is, ha β -t zérusnak választjuk. Vegyük tekintetbe még azt, hogy a perturbálatlan és perturbált energianívók távolsága a feltevés szerint oly kicsiny, hogy az intenzitások számítása szempontjából lényegtelen hibát követünk el, ha $\nu_{j_1}^4$ -t, illetve $\nu_{j_2}^4$ -t bevisszük a zárójelen belül és segítségükkel számoljuk ki a perturbálatlan állapotok közti átmenetek intenzitását I_1^0 - és I_2^0 -t. Ezek tekintetbevételével a perturbált intenzitások a következőképpen adódnak:

$$I_1 = \frac{|H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \varepsilon^2} \left\{ I_1^0 + \frac{\varepsilon^2}{|H_{12}|^2} I_2^0 - \frac{2\varepsilon}{|H_{12}|} I_1^{0\frac{1}{2}} I_2^{0\frac{1}{2}} \cos \gamma \cos \alpha \right\} \quad (20a)$$

$$I_2 = \frac{|H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \varepsilon^2} \left\{ I_2^0 + \frac{\varepsilon^2}{|H_{12}|^2} I_1^0 + \frac{2\varepsilon}{|H_{12}|} I_1^{0\frac{1}{2}} I_2^{0\frac{1}{2}} \cos \gamma \cos \alpha \right\} \quad (20b)$$

A perturbálatlan energianívók közti átmenetek relatív intenzitásai a FRANCK—CONDON elv alapján minden elvi nehézség nélkül számíthatók és így a fenti képletek alapján a perturbált állapotok közti átmenetek relatív intenzitásai két ismeretlen állandót tartalmazó formulával adhatók meg.¹⁴

¹⁴ A (20a) és (20b) képletek segítségével azonnal belátható az az elemi szabály, hogy a perturbáció előtti és perturbáció utáni intenzitások összege egyenlő.

3. §. Intenzitáseloszlás heterogén- és homogén perturbációk esetén.

Láttuk az (5) és (6) tagok elhanyagolásával nyert hullám-egyenlettel jellemezhető rendszerek intenzitáseloszlásának számításánál a FRANCK—CONDON elvnek nagy jelentőségét. Lényegileg meghatározza egy egész sáv intenzitását s maguk az egyes vonalak a sávokon belül általában hasonló, a vibrációs állapottól független menetet mutatnak. Vizsgáljuk meg, hogy a perturbációk fellépésekor megtartja-e a FRANCK—CONDON elv ezt a nagy jelentőségét.

Heterogén perturbáció esetében — hasonlóan az energianívók perturbációjához — az intenzitások is csak keresztezési helyek környezetében mutatnak jelentős eltérést a normális menettől. Mint (19)-ben láthatjuk, mivel a perturbációs matrixelemek kicsinyek, csak az első tag lesz jelentős s így a FRANCK—CONDON elv alkalmazásával a relatív intenzitások számíthatók, ha az energianívók távolsága elég nagy. Tehát heterogén perturbációk esetén az intenzitáseloszlás meghatározása visszavezethető a forgás nélküli ($J=0$) intenzitáseloszlás kiszámítására — hasonlóan a perturbáció nélküli esethez — s csak keresztezési hely közelében kell tekintetbe venni a perturbáció hatását.

Keresztezési hely környezetében csak két nívó kölcsönhatását tekintetbe véve a (20a) és (20b) egyenleteket alkalmazhatjuk. A heterogén perturbáció matrixeleme DIEKE¹⁵ szerint tiszta imaginárius s így $a = \frac{\pi}{2}$ tehát

$$I_1 = \frac{|H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \varepsilon^2} \left\{ I_1^0 + \frac{\varepsilon^2}{|H_{12}|^2} I_2^0 \right\}$$

$$I_2 = \frac{|H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \varepsilon^2} \left\{ I_2^0 + \frac{\varepsilon^2}{|H_{12}|^2} I_1^0 \right\}.$$

Mint azonnal látjuk, a perturbált intenzitások mindig a perturbálatlan intenzitások közé esnek. Perturbált intenzitás zérus csak akkor lehet, ha legalább az egyik perturbálatlan intenzitás is zérus. A keresztezési helyektől elegendő távolságban —

¹⁵ G. H. DIEKE, Phys. Rev. 60, 523 (1941).

hasonlóan az energianívók viselkedéséhez — az intenzitások a megfelelő perturbátlan intenzitásokba mennek át. Közben a perturbált intenzitások a perturbátlan intenzitások keveréke. Ha, mint igen sok esetben szokott lenni, az egyik állapot a színeképben a perturbációtól eltekintve nem észlelhető, akkor ez a heterogén perturbáció lehetővé teszi, hogy néhány, a perturbációban résztvevő vonala megjelenjen és ezek segítségével tekintetbe véve perturbált voltukat, számítások alapján állandóikat meghatározhatjuk.⁹

Tekintsük a homogén perturbációnak azt az egyszerűbb esetét, amikor a két egymást perturbáló energianívó távolsága minden rotációs kvantumszámra jelentős. A (7) és (8) képletek figyelembevételével az energianívók eltolódása a perturbátlan energianívók különbségéhez képest a perturbációs matrixelemek négyzetével, míg az intenzitások a perturbációs matrixelemmel lineárisan változnak. Azonnal nyilvánvaló, hogy az energianívók eltolódása bár jelentős lehet, az intenzitások változása sokkal kisebb méretű úgy, hogy a jelen esetben is jó közelítéssel alkalmazható a FRANCK—CONDON elv a relatív intenzitások kiszámítására.

A homogén perturbáció legáltalánosabb esetében, mikor az energianívók keresztezik is egymást, az átmenetek intenzitásának kiszámításánál is tekintetbe kell vennünk a perturbáció befolyását. Ismét, ha az energianívók távolsága elég kicsiny, akkor két energianívó egymásra való hatását vesszük tekintetbe. DIEKE¹⁵ szerint homogén perturbáció esetében a perturbációs matrixelem valós s így $\alpha = 0$ ha pozitív és $\alpha = \pi$, ha negatív. Ekkor az intenzitások számára a következő kifejezéseket nyerjük:

$$I_1 = \frac{|H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \epsilon^2} \left\{ I_1^0 + \frac{\epsilon^2}{|H_{12}|^2} I_2^0 \mp \frac{2\epsilon}{|H_{12}|} I_1^{0\frac{1}{2}} I_2^{0\frac{1}{2}} \cos \gamma \right\}$$

$$I_2 = \frac{|H_{12}|^2}{|H_{12}|^2 + \epsilon^2} \left\{ I_2^0 + \frac{\epsilon^2}{|H_{12}|^2} I_1^0 \pm \frac{2\epsilon}{|H_{12}|} I_1^{0\frac{1}{2}} I_2^{0\frac{1}{2}} \cos \gamma \right\}$$

a felső jel $\alpha = 0$, az alsó $\alpha = \pi$ esetén érvényes.

Látjuk, hogy a homogén perturbációs intenzitáseloszlás lényegesen különbözik a heterogén perturbációnál fellépőtől. Könnyen belátható, hogy itt lehetséges az az eset, hogy bár a perturbá-

latlan állapotok közti átmenetek intenzitásai zérustól különbözők, a perturbált intenzitások közül az egyik zérus, míg a másik intenzitása ugyanekkor a perturbálatlan intenzitások összege. Az is látható azonban, hogy ez az eset csak akkor léphet fel, ha $\gamma = 0; \pi$, különben a perturbált intenzitások zérustól különbözők.

Ha az energianívók távolsága nagy, tehát nem keresztezéses hely környezetében vagyunk, akkor az intenzitások kiszámítását a (19) képlettel megadott elektromos dipólusmomentum matrix-elemeivel végezhetjük a (13) egyenlet szerint.

Mindkét perturbációs eljárásnak a hátránya az, hogy csak kvalitatív áttekintést tesz lehetővé, de számításokra nem alkalmas, mert ismeretlen állandókat tartalmaz. Teljesen hiábavaló volna ezen állandók meghatározását a tapasztalattal való összehasonlítás segítségével remélni, mert a rendelkezésünkre álló kevés adat lehetetlenné teszi, hogy ezen meghatározás helyességéről meggyőződést szerezzünk. Ha azonban csupán az érdekel, hogy a szóbanforgó vonal jelen van-e a színeképben, akkor tekintjük a (19) képletet. Látjuk, hogy az intenzitáseloszlás megváltozása abban az esetben, ha az egymást perturbáló állapotok energiakülönbsége jelentős, sokkal kisebb lesz, mint a megfelelő energiaértékek eltolódása. Ennek megfelelőleg természetesen kevesebb energianívó perturbáló hatása lesz jelentős az intenzitáseloszlás szempontjából, mint amennyit tekintetbe kellene vennünk az energianívók perturbációjának számításánál. Ezért van az, hogy a homogén perturbáció esetén az intenzitáseloszlás vizsgálatából inkább remélhetjük az energianívók adatainak tisztázását és azoknak legalább közelítőleg helyes megállapítását.

Mivel Van VLECK szerint a homogén perturbációk matrix-elemei a vibrációs frekvenciák négyzetgyökének nagyságrendjébe esnek, ha két egymást perturbáló nívó rotációs állandói eléggé különbözők, akkor a keresztezés helyétől nem nagy távolban az összes nívók perturbáló hatásától eltekinthetünk és így a két nívósorozat relatív intenzitásait itt külön-külön a FRANCK—CONDON elv alapján számíthatjuk.

4. §. A potenciálgörbék számítása.

A (4) egyenletben szereplő $W'_0(r)$ függvényt a stacionárius molekula (2) hullámegyenletének megoldásából kellene kapnunk. Ez azonban igen bonyolult feladat és csak egy, két vagy három valenciaelektron esetében sikerült megoldani,¹⁶ a számításokra így is nehézkes kifejezések adódtak. Tulajdonképpen azonban nincs is $W'_0(r)$ teljes alakjára szükség, csupán az r -től való függés érdekelt és ez különböző feltevések alapján a molekulának a tapasztalatból ismert energiakifejezése segítségével megadható. A molekula potenciálgörbéjének pontról-pontra való megszerkesztésére KLEIN és RYDBERG¹⁷ adtak módszert. Az így megszerkesztett potenciálgörbéhez legjobban simuló és a (4) hullámegyenlet elemi megoldását is lehetővé teszi a MORSE által adott közelítés

$$W'_0(r) = W_{el} + D'(1 - e^{-a(r-r_e)})^2$$

ahol D' a potenciálgörbe minimumára vonatkoztatott disszociációs munka és r_e a nyugalmi magtávolság. MORSE megmutatta, hogy ezen feltevés mellett és a rotáció tekintetbevétele nélkül ($J=0$) a molekula hullámegyenletének megoldását pontosan meg tudjuk adni. E szerint a vibrációs energia sajátértékeire a következő két állandót tartalmazó kifejezés adódik:

$$W = W_{el} + \omega'_e(v + \frac{1}{2}) - x_e \omega'_e(v + \frac{1}{2})^2.$$

A a és r_e állandók a kísérletekből ismeretes B_e , ω_e és D állandókkal a következőképpen függnek össze:

$$\begin{aligned} \omega'_e &= hc \omega_e = \frac{ah}{\pi} \sqrt{\frac{D'}{2M}}; \\ B'_e &= hc B_e = \frac{h^2}{8\pi^2 M r_e^2}; \\ x_e &= \frac{\omega'_e}{4D'}; \quad D' = hc D. \end{aligned} \tag{21}$$

¹⁶ A. BUDÓ u. I. KOVÁCS, Zeitschr. f. Phys. 109, 393 (1938); 111, 633 (1939).

¹⁷ O. KLEIN, Zeitschr. f. Phys. 76, 226 (1932); R. RYDBERG, Zeitschr. f. Phys. 73, 376 (1932); 80, 514 (1933).

Az AgH molekula $^1\Sigma$ alapállapotában GERÖ és SCHMID szerint az energiát a következő formula állítja elő:

$$W = W_{el} + hc[1759,61(v + \frac{1}{2}) - 33,97(v + \frac{1}{2})^2]$$

a disszociációs munka $D = 20,600 \text{ cm}^{-1}$ és a rotációs állandó $B_e = 6,45 \text{ cm}^{-1}$. Látjuk, hogy elég jó közelítést kaptunk, ha a MORSE-feltételnek megfelelőleg a következő kétállandós formulát használjuk:

$$W = W_{el} + hc[1760(v + \frac{1}{2}) - 34(v + \frac{1}{2})^2]$$

(21) tekintetbevételével a molekula potenciálgörbéje:

$$W'_0(r) = W_{el} + hc \ 20,600(1 - e^{-1,492,10^8(r - 1,618 \cdot 10^{-8})^2}).$$

Hasonlóan a felső $^1\Sigma_a$ állapotra:¹⁸

$$W = W_{el} + hc[1700(v + \frac{1}{2}) - 60(v + \frac{1}{2})^2]$$

$$D = 12,000 \text{ cm}^{-1}; \quad B_e = 6,25 \text{ cm}^{-1}$$

és a potenciálgörbe

$$W'_0(r) = W_{el} + hc \ 12,000(1 - e^{-1,888,10^8(r - 1,652,10^{-8})^2}).$$

A $^1\Sigma_b$ energiakifejezése pedig:¹⁸

$$W = W_{el} + hc[950(v + \frac{1}{2}) - 60(v + \frac{1}{2})^2]$$

$$D = 3,750 \text{ cm}^{-1}; \quad B_e = 3,5 \text{ cm}^{-1}$$

és potenciálgörbéje

$$W'_0(r) = W_{el} + hc \ 3,750(1 - e^{-1,888,10^8(r - 2,208,10^{-8})^2}).$$

5. §. A sajátfüggvények számítása.

A (4) egyenlet megoldásához szükséges $W'_0(r)$ potenciálfüggvényt az előző fejezetben előállítottuk. Tegyük ezt be a hullámegyenletbe, vezessünk be az $R = \frac{R'}{r}$ egyenlet segítségével egy könnyebben kezelhető R' függvényt; továbbá alkalmazzuk a $W' = W - W_{el} - D'$ jelölést és végül vezessük be az $y = e^{-a(r-r_e)}$

¹⁸ Az itt megadott molekulaállandók legnagyobb része csak első becslült érték s éppen ezen számítások adnak tájékoztatást helyes módosításukra.

új változót. Ekkor a megoldandó hullámgyenlet alakja a következő lesz:

$$\frac{d^2 R'}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR'}{dy} + \frac{8\pi^2 M}{a^2 h^2} \left[\frac{W'}{y^2} + \frac{2D'}{y} - D' - \frac{Ar_e^2}{y^2 r^2} \right] R' = 0$$

ahol

$$A = \frac{h^2}{8\pi^2 M r_e^2} J(J+1).$$

A differenciálegyenletben szereplő

$$\frac{r_e^2}{r^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\log y}{r_e a}\right)^2}$$

kifejezést fejtsük sorba az $y = 1$ hely környezetében és a négyzetesnél magasabbrendű tagokat hanyagoljuk el, akkor a megoldandó differenciálegyenletünk a következő lesz:

$$\frac{d^2 R'}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR'}{dy} + \frac{8\pi^2 M}{a^2 h^2} \left[\frac{W' - c_0}{y^2} + \frac{2D - c_1}{y} - D - c_2 \right] R' = 0$$

ahol

$$c_0 = A \left[1 - \frac{3}{ar_e} + \frac{3}{a^2 r_e^2} \right].$$

$$c_1 = A \left[\frac{4}{ar_e} - \frac{6}{a^2 r_e^2} \right].$$

$$c_2 = A \left[-\frac{1}{ar_e} + \frac{3}{a^2 r_e^2} \right].$$

Mint PEKERIS¹⁹ megmutatja, a fenti differenciálegyenlet megoldása

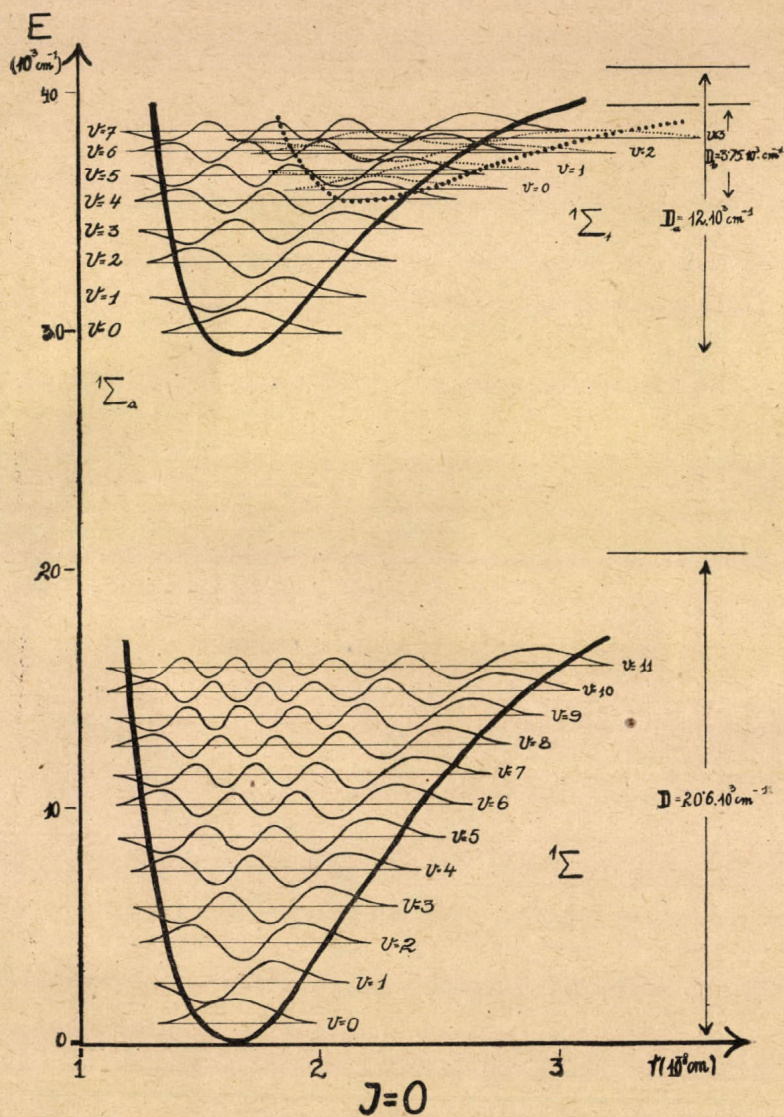
$$R'(y) = N e^{-dy} (2dy)^{\frac{b}{2}} F(2dy)$$

ahol $F(2dy)$ egy generalizált LAGUERRE polinom, N egy normálási tényező és a d és b állandók a már ismert mennyiségekkel a következőképpen függnek össze:

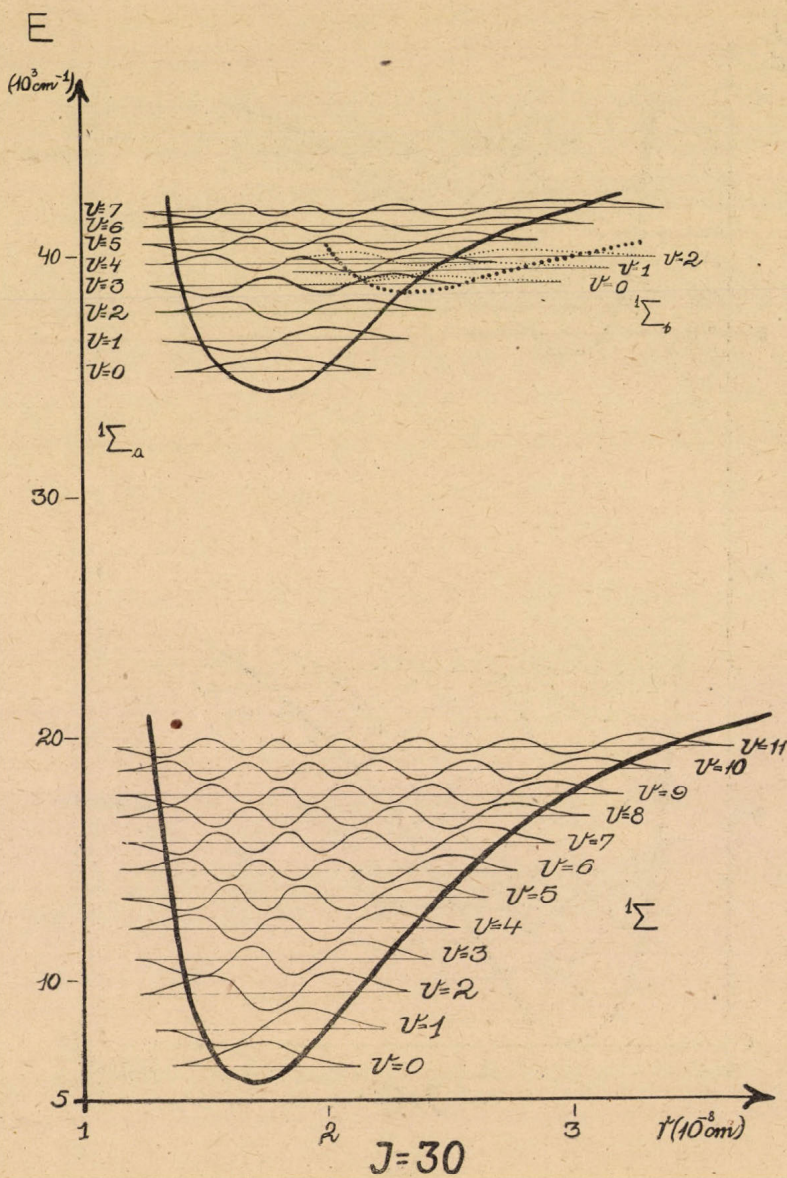
$$d^2 = \frac{8\pi^2 M (D' + c_2)}{a^2 h^2}; \quad b^2 = -\frac{32\pi^2 M (W' - c_0)}{a^2 h^2}.$$

A sajátfüggvények adatait a fenti képletek alapján igen pon-

¹⁹ C. PEKERIS, Phys. Rev. **45**, 98 (1934).



3. ábra.



tosan számítottam. Erre a pontosságra nagy szükség volt, mert például a polinom z -t tartalmazó tagjának együtthatójában már egy tizedred rész tévedés teljesen eltorzítja a görbék alakját aránylag még alacsony vibrációs kvantumszámok esetén is. A sajátfüggvényeket a 3. és 4. ábrán látjuk. Az ordináta-tengelyre az energiát mértem fel cm^{-1} egységben, az abszcissza-tengelyen a magok távolságát ábrázoltam \AA -ben. A sajátfüggvényeket a potenciálgörbékbe berajzolt egyes vibrációs emeletekre mértem fel. Egyes szerzők²⁰ az anharmonikus oszcillátor hullámfüggvényeinek megszerkesztését úgy vélik lehetőnek, hogy először megszerkesztik az anharmonikus oszcillátor potenciálgörbéjének minimumához legjobban simuló parabolát. Ennek a parabolikus potenciálgörbének a sajátfüggvényeit megszerkesztik és ezt valósággal rugalmas anyagból képzelve a parabola középvonalán megerősítik és az anharmonikus oszcillátor potenciálgörbéjén a vibrációs nívó széléig jobbról széthúzzák, balról összenyomják. Ez az egyébként igen kényelmes eljárás a FRANCK—CONDON elv klasszikus alakjának a kvantummechanikai tárgyalására való átvitelével függ össze. E szerint a sajátfüggvények lényeges részei csak a vibrációs nívóknak a potenciálgörbével való metszési helyein mutatkozó szélső maximumai, illetve minimumai volnának, amik így valóban helyes helyre kerülnek. A sajátfüggvények közbülső menetét elhanyagolják. Nyilvánvaló azonban, hogy két sajátfüggvény szorzatának integrálja akkor is nagy abszolút értékű lehet, ha például a szélső maximumok vagy minimumok nem, de igen sok közbülső fed egymást. Az előbb említett eljárás esetén azonban például $v = 9$ vibrációs kvantumszámhoz tartozó sajátfüggvénynél 5—5 maximum, illetve minimum esik mindkét oldalra, míg valóságban 3—7 az arány.

6. §. Az intenzitáseloszlás számítása.

Mint a 3. §-ban láttuk az intenzitáseloszlás meghatározásánál egyszerűen úgy járhatunk el, hogy külön-külön számítjuk ki a ${}^1\Sigma_a$ és ${}^1\Sigma_b$ állapotok és az alapállapot közti átmenetek relatív inten-

²⁰ A. G. GAYDON and R. W. B. PEARSE, Proc. Roy. Soc. London. 173, 37 (1939).

I. táblázat.

$$J = 0.^1\Sigma_a - ^1\Sigma.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	100.0	2.02										
1	8.0	70.9	18.5									
2		16.9	54.8	18.8	0.1							
3		0.8	16.8	18.4	24.8	1.1	0.2					
4			2.4	24.6	23.4	25.5	2.5	0.1				
5			0.1	5.2	29.5	10.9	31.0	5.6	0.5	0.1		
6				3.1	12.5	24.7	0.9	33.2	13.8	5.9	0.8	0.2
7				2.2	4.6	18.1	17.5	0.4	26.4	12.6	5.2	0.9

II. táblázat.

$$J = 0.^1\Sigma_b - ^1\Sigma.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1.1	5.3	36.4	85.7	100.0	81.7	45.9	13.7	1.3			
1	4.9	15.6	57.5	81.7	35.4	0.5	33.2	44.5	34.9	7.9	0.6	
2	8.0	70.2	99.0	25.9	12.5	89.2	46.1	0	13.2	33.2	33.6	16.9
3	29.0	94.0	40.0	6.0	62.2	32.0	2.9	10.1	27.3	12.9	1.6	19.9

zításait és ezekből vonhatunk következtetéseket a perturbált intenzitáseloszlásra. Természetesen a FRANCK—CONDON elv alkalmazható és a relatív intenzitások kiszámítását két vibrációs sajátfüggvény szorzatintegráljának kiszámítására vezethetjük vissza.

III. táblázat.

$$J = 30, {}^1\Sigma_a - {}^1\Sigma.$$

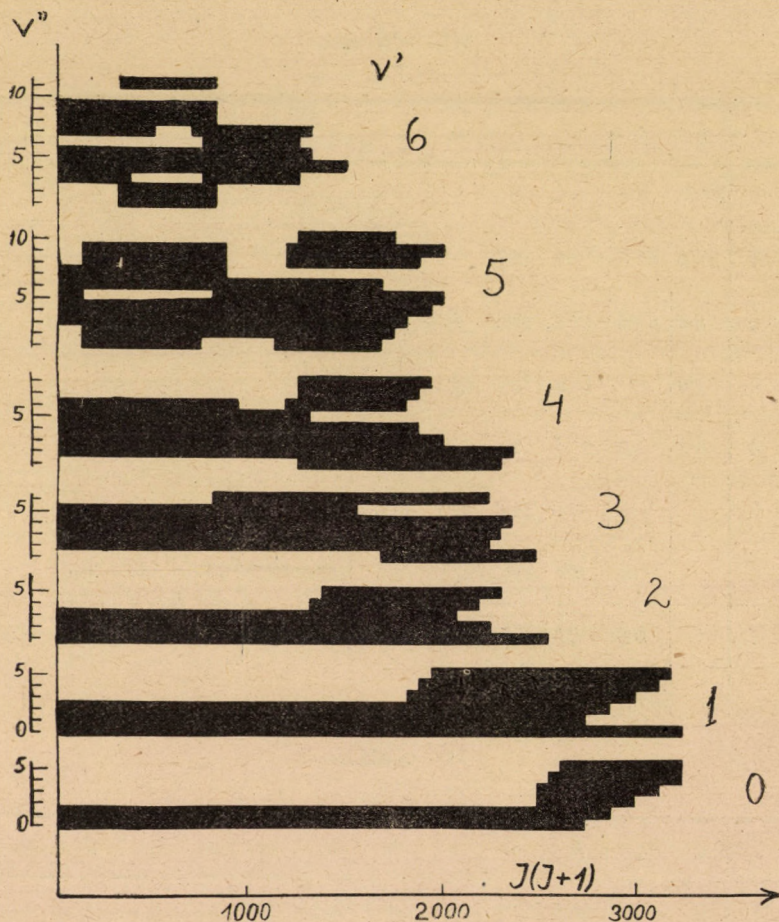
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	100.0	6.3	0.6									
1	10.1	81.5	24.9	2.7	0.2							
2	5.6	61.5	68.9	22.6	4.3	0.7						
3	1.3	10.4	45.2	36.2	28.1	10.9	0.8					
4	0.2	2.6	28.4	22.6	27.3	36.2	18.4	1.2				
5		0.8	6.4	24.3	20.1	11.4	25.2	14.3	2.5	0.1		
6		0.4	2.3	15.1	22.0	16.1	1.7	24.7	17.8	8.6	1.5	
7		0.6	1.6	5.0	19.2	18.3	11.2	3.2	21.0	17.6	10.4	5.2

IV. táblázat.

$$J = 30, {}^1\Sigma_0 - {}^1\Sigma.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	2.6	24.1	51.0	100.0	54.0	21.8	0.8				
1	0.7	6.4	32.9	46.3	25.1	2.8	15.6	24.6	6.2	0.8		
2	2.6	18.1	44.8	8.7	4.3	48.0	28.2	1.4	12.5	25.6	24.1	10.0

A relatív intenzitások kiszámításánál tehát úgy jártam el, hogy a már előbb ábrázolt vibrációs sajátfüggvényeket összeszoroztam és a kapott függvényt milliméteres papirosra ábrázoltam. Az integrálást egy CORADI-féle integrálógéppel végeztem el lehető pontossággal. Az így kapott szorzatintegrálok négyzetét még



5. ábra.

megszoroztam a megfelelő vonal frekvenciájának negyedik hatványával. Így kaptam meg a relatív intenzitásokat. Az I., II., III., IV. táblázatokban látjuk ezeket a relatív intenzitásokat. Könnyebb áttekinthetőség kedvéért a maximális intenzitású vonal intenzitását 100-zal jellemeztem.

Az így nyert perturbálatlan intenzitáseloszlásból a perturbált rendszernek megfelelő intenzitáseloszlás a következőképpen kapható meg.

A 2. ábrán a $^1\Sigma_a$ és $^1\Sigma_b$ elektronállapotok rotációs termsorait láthatjuk. Nyilvánvaló, hogy a $^1\Sigma_a$ állapot $v=0$ vibrációs kvantumszámmal jellemzett termsora a perturbáció következtében a keresztezési hely után a $^1\Sigma_b$ állapot $v=0$ vibrációs kvantumszámmal jellemzett termsorába megy át. Ennek megfelelően mennek az intenzitások is egymásba. Nyilvánvaló tehát, hogy ha a $^1\Sigma_a$ állapot $v=0$ kvantumszámú termsoráról az alapállapotba van átmenet, de a keresztezés helye után a $^1\Sigma_b$ állapot $v=0$ termjeiről nem, akkor ez a sor a keresztezés helye után megszakad. Viszont ha a $^1\Sigma_b$ állapot $v=0$ termsoráról van átmenet az alapállapot valamely nivójára, de ugyan-ezen nivóra a $^1\Sigma_a$ állapot $v=0$ termsorának nivóiról nincs átmenet, akkor a megfelelő sáv a színeképben a keresztezés helye körül kezdődik és csak utána lesz mérhető intenzitású. Az összes rotációs kvantumszámokhoz tartozó vonalak csak akkor lehetnek meg, ha az alapállapotnak ugyanazon nivójára az $^1\Sigma_a$ állapot és a $^1\Sigma_b$ állapot $v=0$ termsorának nivóiról is van átmenet.

A többi perturbált nivónak megfelelő intenzitást teljesen a mostani tárgyaláshoz hasonlóan kaphatjuk meg. Lényeges különbség a $^1\Sigma_a$ állapot magasabb termsorainál csak az lesz, hogy ezeknél nem vehetjük tekintetbe a perturbált energianívók valódi menetét, mert ezek nem tudják követni a sok irányváltoztatást, hanem egyszerűen beállnak a szögfelező irányába, míg a perturbált intenzitások a 3. §-ban mondottak szerint elég híven megőrzik a perturbáció előtti állapot képét. Az 5. ábra mutatja a fenti eljárással nyert intenzitáseloszlás képét.

7. §. Az eredmények taglalása.

Az 1. ábrán láttuk az AgH molekula $^1\Sigma - ^1\Sigma$ sávrendszerében az *intenzitás eloszlását*. Az egyes vonalaknak megfelelő helyet a szerint hagytuk üresen vagy jelöltük meg, amint a sáv megfelelő vonala a spektrumban hiányzott vagy jelen volt. Gondolhatnánk, hogy még jobb képet kaphattunk volna, ha valamilyen módon egy kiválasztott vonalra vonatkozó relatív intenzitásokat is feltüntettük volna. Ennek azonban kevés értelmet

tulajdoníthatnánk, mert az egyes sávok különböző spektrálvidékekre esnek úgy, hogy az alkalmazott lemezek érzékenysége sávonként más és más. Az egyes sávokon belül a vonalak intenzitásának pontosabb menete viszont nem képezte vizsgálódásunk tárgyát.

Ha a számított *perturbálatlan intenzitáseloszlást* összehasonlítjuk a tapasztalattal $J=0$ rotációs kvantumszámnál és alacsony vibrációs nivók esetén, jó megegyezést kellene kapnunk. Látjuk azonnal, hogy kevesebb vibrációs nivóról kapunk átmenetet, mint amennyiről átmenetet mutat a tapasztalat. Nyilvánvaló, hogy a kevésbé pontos disszociációs energiát kell megfelelő módon kisebbre választani. A $^1\Sigma_g$ állapot vibrációs nivóiról való átmeneteket tekintve éppen ellenkezőleg áll a dolog: itt a számítás szerint mérhető intenzitással rendelkező sávok száma a tapasztaltakkal szemben túl sok. Az eredmény javulása itt a disszociációs energia megfelelő növelésétől várható. Ezeknek az eltéréseknek megfelelőleg az intenzitáseloszlás számításánál is inkább csak kvalitatív, mint kvantitatív megegyezést várhatunk.

Az intenzitáseloszlás számítására általában magára az egész perturbációs jelenségre lényeges befolyással van a *perturbációs matrixelem*. A kétatomos molekula tárgyalásának ezt a módját használva nyerjük, hogy a homogén perturbációra a (6) alatt elhanyagolt tagok matrixelemei a mérvadók. A (6) kifejezésben az első tag csak a diagonális elemhez járul hozzá. A harmadik tag, amint azt KRONIG²¹ megmutatta, csupán a rotációs állandó nagyságrendjébe eső matrixelemet ad. Jelentős matrixelemet a második és negyedik tag összevonásából az 5. §-ban alkalmazott R' függvény bevezetésével keletkező

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2Mr} \frac{\partial R'}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} u \quad (22)$$

tag ad. Ennek nagyságrendjét VAN VLECK⁷ becsülte meg és szerinte ez a vibrációs frekvenciák négyzetgyökének nagyságrendjébe esik. Az AgH molekula esetében az egymást pertur-

²¹ R. de L. KRONIG, Physica. 1, 617 (1934).

báló állapotok közül a nagyobb vibrációs frekvenciáját véve, a perturbációs matrixelem nagyságrendjére 40 cm^{-1} adódik.

A perturbált intenzitásokat az I., II., III., IV. táblázatban látható perturbálatlan intenzitásokból az előző §-ban vázolt módszer szerint számítottam. Ha az egyik perturbálatlan intenzitás zérus, akkor a perturbált intenzitás az energianívók keresztezési helyén nem fog azonnal zérus intenzitásra csökkenni, hanem a perturbációs matrixelemtől és a perturbálatlan energianívók helyzetétől függő távolságig túl fog nyúlni a sáv a keresztezés helyén. A sávoknak a fenti perturbációs matrixelemmel számított ilyen a keresztezés helyén túlmenő része csekély a tapasztalattal ellentétben. Hogy a tapasztalattal megegyezésben maradjunk, sokkal nagyobb nagyságrendű matrixelemet kell felvennünk.^{22, 23} Megfelelő nagyságrendű matrixelemet tekintetbe véve, alacsonyabb vibrációs nivókra a tapasztalat és elmélet kvalitatív megegyezése helyreáll, viszont magasabb vibrációs kvantumszámú nivóknál az itt adott közelítés nem ad helyes képet, mert ekkor már a perturbációs matrixelem nagysága miatt nem alkalmazhatók a nem degenerált termekre vonatkozó perturbációs számítási eljárások. A degenerált termekre érvényes egyenletek alkalmazásában pedig az jelent nehézséget, hogy igen sok nívó perturbáló hatását kell tekintetbe venni.

* * *

²² Rá szeretnék mutatni a (22) tagnak a homogén perturbációban való igen kétes szerepére. Ismeretes, hogy homogén perturbációk erősségének meghatározására egy a FRANCK—CONDON elvhez hasonló elv szerint kell eljárni. E szerint a maximális perturbáció azon a helyen lesz, ahol az energianívók különbségének kicsinnyéválásán kívül még a két sajátfüggvény szorzatintegráljai is jelentősek. Ez akkor következik be, ha a két sajátfüggvény szélsőértékei legalább közelítőleg fedik egymást. Nyilvánvaló, hogy a (22) tagot tekintve perturbációs tagnak, ez semmiképpen nem áll fenn, sőt éppen ilyen esetben a perturbációs matrixelemek igen kicsinyek.

²³ Az 1. §-ban láttuk, hogy keresztezési helyen az eltérítés éppen a perturbációs matrixelem abszolút értékét adja meg. A tapasztalt rotációs termsorok menetéből ezt megbecsülve, szintén sokkal nagyobb nagyságrendű matrixelemet kapunk.

E dolgozat a *M. Kir. József Nádor Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében* készült; az intézet igazgatójának, dr. POGÁNY BÉLA műegy. ny. r. tanár úrnak legyen szabad hálás köszönetemet kifejeznem ennek lehetővé tételéért. Mély hálával mondok köszönetet dr. ORTVAY RUDOLF egy. ny. r. tanár úrnak, a *Kir. M. Pázmány Péter Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézete* igazgatójának, hogy munkámat állandó figyelemmel kísérte és kitartásra buzdított. Örömmel mondok e helyen is köszönetet dr. SCHMID REZSŐ egy. magántanár, műegy. adjunktus, dr. GERŐ LORÁND műegy. tanársegéd és dr. KOVÁCS ISTVÁN középisk. tanár uraknak, akiknek ösztönzésére e dolgozat megszületett s akik a dolgozat megírása folyamán is sok értékes tapasztalatukkal és útbaigazításukkal állottak mellettem.

Gáspár Rezső.

DIE INTENSITÄTSVERTEILUNG IM $^1\Sigma-^1\Sigma$ GESTÖRTEN BANDENSYSTEM DES AgH MOLEKÜLS.

Die erste Hälfte der Arbeit beschäftigt sich mit den heterogenen und homogenen Störungen und gibt die im Laufe der weiteren Erörterung notwendigen, sich auf die entarteten und unentarteten Terme beziehenden Störungsverfahren an. Nach einem Referat über das FRANCK—CONDON Prinzip, das für die Berechnung der relativen Intensitäten von Übergängen zwischen ungestörten Termen von grosser Bedeutung ist, wurde untersucht, wie dieses Prinzip im Falle der Störung entarteter, bzw. unentarteter Terme anzuwenden ist. In den letzten Fällen erhielten wir eine Formel, die zur Ausrechnung der relativen Intensitäten unbekannte Konstante enthält. Wenn aber das Matrixelement der Störungsfunktion, wie bei der heterogenen Störung, genügend klein ist, dann sind die Abweichungen der Intensitäten von den ungestörten Intensitäten — in genügender Entfernung von den Kreuzungspunkten der Termreihen — gering und so sind die relativen Intensitäten auf Grund des FRANCK—CONDON Prinzips zu rechnen. Bei homogener Störung, als das unter (6) vernachlässigte Glied

die Störungsfunktion ist, fällt die Grössenordnung des Matrixelementes der Störungsfunktion in die Grössenordnung der Quadratwurzel der Schwingungsfrequenz und so sind die relativen Intensitäten in genügender Entfernung von den Kreuzungspunkten wieder auf Grund des FRANCK—CONDON Prinzips zu berechnen.

Die Intensitätsverteilung des $^1\Sigma-^1\Sigma$ gestörten Bandensystems des AgH Moleküls habe ich auf Grund dieses Verfahrens ausgerechnet. Der Vergleich mit der Erfahrung zeigt, dass der obige Wert der Grössenordnung des Matrixelementes der Störungsfunktion nicht richtig ist, sondern wir müssen ein Matrixelement der Störungsfunktion von viel grösserer Grössenordnung annehmen.

R. Gáspár.

KICSINY GÖRBÜLETŰ FOLYADÉKFELSZÍNEK ALAKJÁNAK VIZSGÁLATA.

TARTALOM.

BEVEZETÉS	2
ELMÉLETI RÉSZ.	
1. <i>Speciális folyadékfelszínek kicsiny görbületű részeinek vizsgálata.</i>	
1. §. Hengerszimmetrikus felszínek	4
2. §. Forgási szimmetriát mutató felszínek	8
II Általános tárgyalás.	
3. §. A kapilláris differenciálegyenlet egyszerűsödése	11
4. §. Speciális folyadékfelszínek közel vízszintes részeinek tárgyalása az alapegyenlet alapján	12
III. Néhány következtetés az alapegyenletből.	
5. §. A folyadékfelszín alakja konvex sokszög keresztmetszetű edényben	14
6. §. Néhány tétel a szabályos n oldalú sokszög keresztmetszetű edényben előálló folyadékfelszínekről	17
KÍSÉRLETI RÉSZ.	
7. §. Előzmények	19
8. §. A módszer ismertetése	20
9. §. Két párhuzamos, vízszintes alkotójú hengerszimmetrikus test között előálló hengerszimmetrikus felszínek tárgyalása	22
10. §. A forgástengelyt metsző forgásfelület-alakú folyadékfelszínek tárgyalása	27
MÉRÉSEK.	
11. §. A kísérleti berendezés	28
12. §. A fényképfelvételek feldolgozása	32
13. §. Mérési eredmények	32
14. §. Szögletes edények	41
15. §. Rendszeres hibák, ellenőrző mérések	45
ÖSSZEFOGLALÁS	49

Bevezetés.

A kapillaritás irodalma bár rendkívül gazdag, mégis csak elvértve látunk benne kísérleteket folyadékfelszínek alakjának az elméletileg megadott alakkal való közvetlen összehasonlítására. A kísérleti vizsgálatok célja legtöbbször a felszín egyenletéből levezethető, könnyebben mérhető mennyiségek: emelkedési magasság, hajlásszög, görbületi sugár stb. meghatározása volt. A folyadékfelszín egyes pontjainak koordinátáit kimérni nyilván nem könnyű feladat. Tudomásom szerint HAGEN volt az első, aki ilyen méréseket végzett.¹ Függőleges irányban eltolható igen finom csúcsot hozott érintkezésbe a folyadék felszínével, a csúcs helyzetét skálán leolvasta, így nyerte a felszín egyes pontjainak magasságát egy önkényes nívóra vonatkozóan. Ilymódon 1 mm-es magasságkülönbségek mérésében a maximális észlelési hiba körülbelül 0.1 mm körül mozgott. HAGEN ezzel a berendezéssel egyetlen végtelen hosszú függőleges fal mentén felemelkedő folyadék felszínének a kérdéses falra merőleges metszetét mérte ki és konstataulta, hogy az a mérési hibák határain belül egyezik az elméletileg levezetett logaritmikus görbével. Nincs tudomásom róla, hogy HAGEN más típusú folyadékfelszíneket is kimért volna ilymódon, vagy, hogy másvalaki HAGEN ezirányú megkezdett munkáját folytatta volna. Más utakon indult el körülbelül negyven évvel később A. M. WORTHINGTON.² WORTHINGTON célja ugyan a kapilláris állandó meghatározása, módszere azonban a felszín teljes alakjának meghatározását is lehetővé teszi. Függő cseppek képét nagyítva sík felfogó ernyőre vetítette ki és azt ott kirajzolta. A kapilláris állandót e szelvény-görbe mechanikus kvadraturája útján határozta meg. Továbbfejlesztette ezt az eljárást C. V. RAMAN,³ aki kirajzolás helyett fotografálta a cseppek alakját és a negatívokat koordináta-mikroszkópon mérte ki. Lényegében ugyanez A. FERGUSON módszere is,⁴ ő azonban a kapilláris állandó meghatározásán felül a felszín alakjának is több figyelmet szentel.

¹ Abh. Ak. Wiss. Berlin. 1845.

² Philosophical Magazine 1885.

³ Phil. Mag. 1907.

⁴ Phil. Mag. 1912. és 1913.

Megkísérli előállítani azt az $y = bx^2$, illetőleg az $y = bx^2 + cx^4$ alakban. Megállapítja, hogy 4—5 mm átmérőjű csövekben függő vízcspepeknél a csúcspont körülbelül 2 mm-es környezetében a formulák az észleléseket 0·01—0·02 mm pontossággal adják vissza.

Mindezek a vizsgálatok — mint általában a legtöbb kapilláris vizsgálat — meglehetősen erős görbültségű folyadékfelszíneket tartanak szem előtt. Ez természetes is, hiszen egyrészt a kapilláris jelenségek egyik legfeltűnőbbike éppen a folyadékfelszínnek görbültsége, másrészt a nagy görbületi sugarú (például 8—10 m) felszínnek tanulmányozása — alakjuknak explicit kimérésétől eltekintve is — meglehetősen nehézségekbe ütközött.

Dolgozatomban kicsiny görbületű folyadékfelszínekkel foglalkozom, ezek közül is egyelőre csak azokkal, amelyeknek érintő-síkja a vízszinteshez igen kicsiny szöggel hajlik.¹ A következőkben legtöbbszörre ez utóbbi feltevést használjuk ki. Hogy ez a feltevés nemcsak egy végtelen kicsiny, hanem egy mérhető intervallumban is teljesül, ezt biztosítja az a követelés, hogy a felszín görbülete kicsiny legyen. A kísérletek folyamán többször 8—12 mm átmérőjű kör nagyságú darabon vizsgáltam a folyadékfelszíneket. Ezek görbülete 0·7—10 m között váltakozott, az érintősík hajlásszöge a vízszinteshez általában perc nagyságrendű (0·001 radian) volt, a fél fokot (0·01 radian) csak a leg-erősebb görbületeknél érte el.

A tárgyalás három részre oszlik. Az elméleti részben rámutatok arra, hogyan egyszerűsödik a kapilláris felületek differenciálegyenlete — s ennek megfelelően milyen érdekes és aránylag egyszerű a felszínnek alakja is — azokon a részeken, amelyeket eddig általában a «gyakorlatilag teljesen sík» vagy «vízszintes» jelzővel illettek. A kísérleti részben egy új módszert ismertetek, amely lehetővé teszi igen nagy (10—20 m) görbületi sugarú felszínnek alakjának nagy pontossággal történő, közvetlen meghatározását. (Ha szabad összehasonlítást tenni a HAGEN-féle mód-

¹ Ha valamely felület középgörbülete valamely intervallumban igen kicsiny, úgy a normális iránya ezen a felületrészen majdnem állandó. Külön vizsgálatok tárgyát képezhetnék olyan felszínek, amelyek normálisa nem a függőleges, hanem egy más, fix irány körül ingadozik.

szerrel: mintha az ott szereplő fel-le mozgatható csúcs skáláján tizedmikronokat lehetne leolvasni s századmikronokat még becsülni.) Végül a harmadik részben az új módszerrel végzett méréseimet ismertetem. Ezek a mérések egyrészt az elmélet alapjaira építenek, másrészt egyúttal az elmélet eredményeinek kísérleti igazolását is adják.

ELMÉLETI RÉSZ.

I. Speciális folyadékfelszínek kicsiny görbületű részeinek vizsgálata.

1. §. Hengerszimmetrikus felszínek.

Ilyen folyadékfelszín áll elő:

- a) egyetlen «végtelen hosszú» vízszintes alkotójú hengerszimmetrikus test mentén (pl. síklap mentén);
- b) két «végtelen hosszú» hengerszimmetrikus test között, ha ezek alkotói egymással párhuzamosak és ugyancsak vízszintesek (pl. két párhuzamos síklap);
- c) igen hosszú, keskeny résből kilépő cseppeken, illetőleg buborékokon; ezek a felszínek azonban alakjukra nézve a b) csoportba sorolhatók.

Az előálló hengerszimmetrikus folyadékfelszín alkotói nyilván párhuzamosak a határoló felület, illetőleg felületek alkotóival.

a) Ismeretes, hogy ebben az esetben a felszín egyenlete¹

$$x + c = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{lognat} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2}}{\frac{|z|}{a}} - a \sqrt{2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2} \quad (1)$$

Az x tengelyt a normálnívóba helyeztük, az alkotókra merőlegesen, a folyadékfelszín «sík» része felé irányítva; a z tengely a nehézségi erő irányával szembe mutat. a jelöli a kapilláris állandót, a c konstans értéke pedig csakis az origo megválasztásától függ.

¹ L. pl. WINKELMANN: Handbuch der Physik. 2. Aufl. 1908. Bd. I. 2. Hälfte; p. 1132.

Szorítkozzunk most a felszínnek azokra a részeire, ahol az érintősík közel vízszintes. Minden különösebb bizonyítás nélkül belátható, hogy a szóbanforgó esetben $\frac{dz}{dx_1}$ -szel egyidejűleg z is igen kicsiny marad. A $\frac{dz}{dx} \ll 1$ feltétel helyett a $z \ll 1$ (illetőleg $1 < a\sqrt{2}$ folytán a $z \ll a\sqrt{2}$) feltételt vesszük tekintetbe s ennek alapján az (1) egyenletben $\sqrt{2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2}$ helyébe $\sqrt{2}$ -t írunk. Rendezés után — ha még a $\frac{\sqrt{2}}{a} = A$ és a lognat $\frac{4}{A} - Ac - 2 = \lognat C$ jelölést bevezetjük — a

$$z = Ce^{-Ax} \quad (2)$$

egyenletre jutunk. A C értéke ismét az origo helyzetétől függ.

b) Ismeretes, hogy ebben az esetben a felszín egyenlete a következő:¹

$$x = \frac{ak}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_t^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} - \frac{2}{k^2} \int_t^1 \sqrt{\frac{1-k^2s^2}{1-s^2}} ds \right\} \quad (3a)$$

$$z = \sqrt{H^2 + 2a^2 \sin^2 \frac{\tau}{2}}, \quad (3b)$$

$$\text{ahol } k^2 = \frac{2a^2}{H^2 + 2a^2}, \quad t = \cos \frac{\tau}{2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{dz}{dx}.^2 \quad (3c)$$

Az x és z tengely iránya ugyanaz, mint az előző pontban.

Az origót úgy választottuk meg, hogy $x=0$ -nál $\frac{dz}{dx} = 0$ legyen.

Az ehhez a ponthoz tartozó z -t H -val jelöltük.³

¹ Feltéve, hogy a felszínnek nincs inflexiós pontja. Inflexiós ponttal bíró folyadékfelszínnek, cseppektől eltekintve, csak kivételes esetben lehet vízszintes érintősíkja, ezért ilyen felszínekkel most nem foglalkozunk. Az egyenletekre vonatkozóan v. ö. pl. WINKELMANN: l. c. p. 1134.

² z független lévén y -től, a totális deriválás jele indokolt.

³ A továbbiakban a kapilláris felszínnek azt a pontját, amelyben az érintősík vízszintes, röviden a meniszkusz csúcsának nevezzük, noha ott csúcs nem alakulhat ki. H -t a továbbiakban emelkedési magasságnak nevezzük. A szóbanforgó esetben, amikor a felszínnek nincs inflexiós pontja, a meniszkusz csúcsa van a legközelebb a normálnívóhoz: $H = \min |z|$.

Vizsgáljuk most, hogyan egyszerűsödik ez az egyenletrendszer azokon a helyeken, ahol a felszín középgörbülete igen kicsiny.

A kapilláris felszín bármelyik pontjában a középgörbület egyenesen arányos a normálnívótól mért távolsággal.¹ Ebből egyrészt következik, hogy a középgörbület a meniszkusz csúcsában a legkisebb, tehát a vizsgált pontok a meniszkusz csúcsa környezetében lesznek. Másrészt az következik belőle, hogy ha a középgörbület a meniszkusz csúcsában igen kicsiny, akkor ugyanez igaz a csúcsnak a normálnívótól mért távolságára, azaz az emelkedési magasságra is: $H \ll 1$. A meniszkusz csúcsában a felszín érintősíkjá vízszintes lévén, a csúcs bizonyos környezetében még $\tau \ll 1$ is fennáll.

Végezzük el ezekután (3a)-ban az $s = \cos \varphi$ helyettesítést, egyúttal vezessük be az integrál-jel alatt a

$$k^2 = 1 - \varepsilon^2 \quad (4)$$

jelölést:

$$x = \frac{ak}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sqrt{\sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right\}. \quad (5)$$

$\tau \ll 1$ miatt $\sin \varphi$ helyébe φ , $\cos \varphi$ helyébe 1 írható, s az integráció most már könnyen elvégezhető:

$$x = \frac{a}{k\sqrt{2}} \left\{ \operatorname{argsinh} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{4} \sqrt{\frac{4\varepsilon^2}{\tau^2} + 1} \right\}.$$

$H^2 \ll 1$ lévén, elhanyagolható $2a^2 (=) 15$ mellett, tehát (3c) tekintetbevételével k helyébe 1 írható. Másrészt (3c) és (4) alapján

$$\varepsilon = \frac{H}{\sqrt{H^2 + 2a^2}} (=) \frac{H}{a\sqrt{2}}.$$

¹ Ezt mondja ki a kapillaritás differenciálegyenlete; v. ö. (15) egyenlet. Az arányossági tényező $\left(\frac{2}{a^3}\right)$ nagyságrendje 0.1 mm^{-2} .

Tehát

$$Ax = \operatorname{argsinh} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\tau}{H} - \frac{\tau H}{4} \sqrt{\left(\frac{\tau}{H}\right)^2 + A^2}; \quad \left(A = \frac{\sqrt{2}}{a}\right).$$

A jobboldal második tagja az elsőnél körülbelül milliószor kisebb (τ és H nagyságrendje egyformán ezredkörűli), tehát az első tag mellett elhanyagolható. Ekkor

$$H \frac{1}{a\sqrt{2}} \sinh Ax = \frac{\tau}{2}.$$

$\tau \ll 1$ alapján jogosult (3b)-ben $\sin^2 \frac{\tau}{2}$ helyébe $\left(\frac{\tau}{2}\right)^2$ -t írni; $\frac{\tau}{2}$ értékét behelyettesítve

$$z = H \cosh Ax. \quad (6)$$

Ez lesz tehát a felszín egyenlete a csúcspont megfelelő környezetében.

Ha H kicsiny, akkor (5) alapján H aránylag egyszerűen fejezhető ki az edény méreteivel és a határszöggel.

Legyen például az edény két azonos anyagból készült, párhuzamos, függőleges, egymástól $2d$ távolságban lévő síklap.¹

A határszög legyen ϑ . $x=d$ -nél nyilván $\tau = \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Írjuk fel

ennek alapján (5)-t $x=d$ esetére. Mivel ε^2 igen kicsiny (nagyságrendje 10^{-6}), ezért található olyan δ érték (pl. $\delta=4^\circ$), hogy $\varphi < \delta$ -ra $\sin \varphi = \varphi$; $\cos \varphi = 1$ írható, $\varphi > \delta$ -ra pedig $\varepsilon^2 \cos^2 \varphi$ elhanyagolható $\sin^2 \varphi$ mellett. Az (5)-ben szereplő integrálok mind-

egyikét két részre bontjuk: a $(0, \delta)$ és a $\left(\delta, \frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)$ interval-

lumokra vonatkozó integrálokra. Ezekben a fentebb említett elhanyagolásokat bevezetjük s az integrációt végrehajtjuk. Az in-

tegráció végeredményében $\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 (=) 10^{-4}$ -t az 1 mellett elhanyagoljuk, $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$ helyébe $\frac{\delta}{2}$ -t, $\cos \delta$ helyébe $1 - \frac{\delta^2}{2}$ -t írunk; H -ra

a következő képletet nyerjük:

$$H = \frac{8}{A} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta}{4}\right) e^{-4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta}{4}\right)} e^{-Ad} \quad \left(A = \frac{\sqrt{2}}{a}\right) \quad (7)$$

¹ Az általános eset teljesen ennek mintájára tárgyalható.

Érdekes ennek a formulának a hasonlósága ahhoz a képlethez, amelyet LAPLACE állított fel¹ nagy átmérőjű függőleges alkotójú körhengerekben előálló felszínek emelkedési magasságára (r a cső sugarát jelöli):

$$H = 4 \sqrt{\frac{2r\pi}{A}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta}{4} \right) e^{-4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta}{4} \right)} e^{-Ar}; \left(A = \frac{\sqrt{2}}{a} \right) \quad (8)$$

2. §. Forgási szimmetriát mutató felszínek.

Bár ezek a felszínek a legközönségesebbek közé tartoznak, azaz aránylag a legtöbbször fordulnak elő mind laboratóriumban, mind a természetben, alakjukat — mint tudjuk — mégis olyan függvények írják le, amelyek a racionális, irracionális vagy elemi transzcendens függvényekből nem tehetők össze, csak differenciálegyenletükkel jellemezhetők. Részletes numerikus táblázatok már készültek róluk.²

Ezeknek a komplikált felszíneknek azok a részei, amelyek már közel vízszintesek, a jól ismert BESSEL-féle függvényekkel írhatók le. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

Hengerkoordinátákat alkalmazunk: z, r, φ . A z tengely essék egybe a forgástengellyel és irányítsuk a nehézségi erő irányával szembe.³ Ismeretes, hogy ekkor a folyadékfelszín differenciálegyenlete a következő alakú:⁴

$$A^2 z = \frac{1}{r} \frac{d r \sin \tau}{dr}, \quad (9)$$

ahol $A = \frac{\sqrt{2}}{a}$ és $\operatorname{tg} \tau = \frac{dz}{dr}$.

¹ Mécanique céleste. Suppl. au X^e livre, Suppl. à la théorie de l'action capillaire. Paris, 1807, p. 65.

² PL. BASHFORD—ADAMS: An attempt to test the theory of capillary action. Cambridge, 1883.

³ Ha valamely kapilláris felület forgási szimmetriát mutat, úgy a forgástengely csak függőleges lehet. Ez egyszerűen következik abból, hogy az egyenlő középgörbületű helyei ugyanazon kapilláris felületnek a normálnívótól ugyanakkora távolságra vannak.

⁴ L. pl. WINKELMANN: l. c. p. 1140.

⁵ z független lévén φ -től, a totális jel itt is indokolt.

Szorítkozzunk most a folyadékfelszínnek azokra a részeire, ahol τ , vagyis a meridiánmetszetgörbe érintőjének a vízszintessel bezárt szöge, 1° -nál kisebb. Ekkor (9)-ben egy fél ezreléknél kisebb hibával $\sin \tau$ helyébe $\operatorname{tg} \tau = \frac{dz}{dr}$ -et írhatunk:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} - A^2 z = 0.1 \quad (10)$$

Bevezetve az $iAr = \varrho$ jelölést, a

$$\frac{d^2 z}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dz}{d\varrho} + z = 0$$

BESSEL-féle differenciálegyenletre jutunk.

Ennek totális megoldása, mint ismeretes

$$z = c_1 J_0(\varrho) + c_2 Y_0(\varrho).$$

ahol J_0 , illetőleg Y_0 az első-, illetőleg másodfajú 0-adrendű BESSEL-függvényt jelenti.² A (10) egyenlet totális megoldása tehát:

$$z = c_1 J_0(iAr) + c_2 Y_0(iAr).$$

Ismeretes, hogy $J_0(ix)$ valós, $Y_0(ix)$ ellenben komplex mennyiség, éspedig

$$Y_0(ix) = L_0(x) - iI_0(x), \quad (11)$$

ahol $I_0(x)$ az $J_0(ix)$ értékét jelöli és

$$L_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u^2 - 1}} du,$$

tehát ugyancsak valós mennyiség.³ $Y_0(ix)$ és $J_0(ix)$ (10)-nek egymástól független partikuláris megoldásai lévén, (11) alapján kell,

¹ Ez az egyenlet megtalálható már LAPLACE-nál is (l. c. p. 60). LAPLACE azonban csak a forgástengelyt metsző folyadékfelszínekre vonatkozó partikuláris megoldást tárgyalja. Ezt a megoldást a (14)-el teljesen azonos $z = H \int_0^\pi e^{Ar \cos \varphi} d\varphi$ alakban írja fel. (V. ö. HANSEN-formula; 337. oldal,

¹ jegyzet.)

² L. pl. SCHAFHEITLIN: Die Theorie der BESSEL'schen Funktionen. 1908, p. 41.

³ SCHAFHEITLIN: l. c. p. 105.

hogy $L_0(x)$ is partikuláris megoldás legyen, amely $J_0(ix)$ -től lineárisan független. (10)-nek valós változókra vonatkozó teljes integrálja tehát a következő:

$$z = c_1 I_0(Ar) + c_2 L_0(Ar). \quad (12)$$

Ismeretes, hogy

$$\begin{aligned} I_0(0) = 1, \quad I_0(\infty) = \infty; \quad I'_0(0) = 0, \quad I'_0(\infty) = \infty \\ L_0(0) = \infty, \quad L_0(\infty) = 0; \quad L'_0(0) = \infty, \quad L'_0(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

A továbbiakban három esetet különböztetünk meg.

1. A folyadékfelszín metszi a forgástengelyt. Ilyen felszín áll elő például függőleges alkotójú körhenger-edény belsejében.

A folyadékfelszín érintősi kja a forgástengellyel közös pontban nyilván vízszintes, vagyis $r=0$ -nál $\frac{dz}{dr} = 0$. Ha ebben a pontban $z = H$, akkor (13) alapján (12)-ben $c_1 = H$, $c_2 = 0$, tehát a folyadékfelszín egyenlete ebben az esetben:

$$z = H I_0(Ar). \quad (14)$$

2. A folyadékfelszín nem metszi a forgástengelyt és $r \rightarrow \infty$ -re $\frac{dz}{dr} \rightarrow 0$. Ilyen felszín áll elő például a függőleges alkotójú körhengeren kívül, ha azt végtelen kiterjedésű folyadékfelszínbe mártjuk.

Mivel $r = \infty$ -re $\frac{dz}{dr} = 0$, azért (13) alapján (12)-ben $c_1 = 0$ s így

$$z = c_2 L_0(Ar).$$

Ez az egyenlet írja le a felszínt a közel vízszintes részekben. Ezek a pontok nyilvánvalóan a végtelen egy bizonyos környezetében fekszenek. Ismeretes azonban, hogy $r = \infty$ -re $L_0(x)$

aszimptotikusan egyenlő $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x}$ -el,¹ ha tehát már r elég nagy, akkor a folyadékfelszín egyenlete a következő alakba írható $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_2 = c \text{ jelöléssel}\right)$:

$$z = c \frac{1}{\sqrt{Ar}} e^{-Ar}.$$

¹ SCHAFHEITLIN: l. c. p. 105.

A c_2 , illetőleg a c konstans értéke meghatározható, ha z -nek egy bizonyos r -hez tartozó értékét megadjuk.

3. A folyadékfelszín nem metszi a forgástengelyt és $r=r_0$ -nál $\frac{dz}{dr} = 0$. Ilyen felszín áll elő például két függőleges alkotójú koaxiális körhenger között.

Ebben az esetben nyilván sem c_1 , sem c_2 nem tűnik el, a felszínt tehát a (12) egyenlet írja le. Legyen $r=r_0$ -nál $z=H$; a c_1 és c_2 konstansok értéke ekkor a

$$\begin{aligned} c_1 I_0(Ar_0) + c_2 L_0(Ar_0) &= H \\ c_1 I'_0(Ar_0) + c_2 L'_0(Ar_0) &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből meghatározható.

II. Általános tárgyalás.

3. §. A kapilláris differenciálegyenlet egyszerűsödése.

A kapilláris felületek ismert differenciálegyenlete a következő: ¹

$$sgz + a \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = 0. \quad (15)$$

A z tengelyt a nehézségi erő irányával szembe irányítottuk, az origót a normálnívóba helyeztük; R -et és R' -t (a felület egy pontjában a főgörbületi sugarakat) pozitívnak, illetőleg negatívnak vettük, a szerint, hogy a kérdéses főnormálmetszet görbületi középpontja a felület normálisának a folyadék belseje felé mutató részén, vagy a kifelé mutató részén van.

A $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, valamint az $a^2 = \frac{2a}{sg}$ ² jelölést alkalmazzuk, majd $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ -nek a differenciálgeometriából ismert kifejezését írjuk be egyenletünkbe:

$$\frac{\partial \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial y} = \frac{2}{a^2} z. \quad (16)$$

¹ L. pl. WINKELMANN: l. c. p. 1126.

² a jelöli a felületi feszültséget, a a kapilláris állandót.

A kapilláris felszínek közül azokkal, illetőleg a kapilláris felületeknek azokkal a részeivel foglalkozunk, ahol a felület normálisa közel függőleges, vagyis a z tengellyel igen közel 0, vagy igen közel π szöget zár be. Ezekben a pontokban tehát

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} (=) \pm 1.$$

Ebből azonban az következik, hogy p^2+q^2 az 1 mellett elhanyagolható. Vezessük be ezt az elhanyagolást a (16) egyenletbe, vegyük tekintetbe p és q jelentését, nyerjük alapegyenletünket:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = A^2 z.$$

($A = \frac{\sqrt{2}}{a}$; ezzel a jelöléssel a továbbiakban állandóan élni fogunk.)

Differenciálegyenletünk feltűnő rokonságot mutat a periodikusan rezgő membrán amplitudo-egyenletéhez, amennyiben attól csak a jobboldalon álló tag előjelében különbözik. Az ezen az analógián alapuló módszerek alkalmazása még további vizsgálatok tárgya lehet.

Az általános esettel most nem foglalkozunk tovább. Megmutatjuk ellenben, milyen egyszerűen és elegánsan nyerhetők az I. pont eredményei alapegyenletünkéből.

4. §. Speciális folyadékfelszínek közel vízszintes részeinek tárgyalása az alapegyenlet alapján.

1. Hengerszimmetrikus felszínek.

Ha az x tengelyt az alkotókra merőlegesen irányítjuk, z független y -től. Az alapegyenlet tehát a következő alakú lesz:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = A^2 z.$$

Ennek a differenciálegyenletnek totális megoldása:

$$z = c_1 e^{Ax} + c_2 e^{-Ax}. \quad (17)$$

a) eset: a folyadékfelszín egyetlen vízszintes alkotójú hengerszimmetrikus test hatására alakul ki.

Ha az x tengelyt a felszín «sik» része felé irányítjuk és az x tengelyen az origót a szilárd testtől véges távolságban jelöljük ki, úgy $x = +\infty$ -re $z=0$ és $\frac{dz}{dx} = 0$ -nak kell lennie. Mindkét feltétel kielégül, éspedig csakis akkor, ha $c_1 = 0$. Tehát (17)-ből

$$z = c_2 e^{-Ax}.$$

c_2 értékét az origo helyzete határozza meg (v. ö. (2) egyenlet).

b) eset: a folyadékfelszín két vízszintesen parallel alkotójú hengersizmetrikus test (pl. két parallel, függőleges síklap) között alakul ki.

Minthogy — koordinátarendszerünk választása folytán — $x=0$ -nál $\frac{dz}{dx} = 0$ és $z = H$ (1. §. b) pont), azért (17)-ben kell, hogy $c_1 = c_2 = \frac{H}{2}$ legyen, vagyis (17)-ből

$$z = H \cosh Ax.$$

(V. ö. (6) egyenlet).

2. Forgásfelület alakú felszínek.

Ismét hengerkoordinátákat vezetünk be. A z tengelyt egybe-ejtjük a forgástengellyel és a nehézségi erővel szembe irányítjuk. z nyilván független φ -től, $z=f(r)$. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tekintetbevételével

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3} f'(r) + \frac{x^2}{r^3} f''(r)$$

és

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3} f'(r) + \frac{y^2}{r^3} f''(r).$$

Behelyettesítve ezeket az alapegyenletbe

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} - A^2 z = 0.$$

Ez az egyenlet máris azonos a (10)-el. Az adott határfeltételeknek megfelelő megoldásait a 2. §.-ban már felírtuk.

III. Néhány következtetés az alapegyenletből.

5. §. A folyadékfelszín alakja
konvex sokszög keresztmetszetű edényben.¹

Nem okoz nehézséget alapegyenletünkhöz partikuláris megoldásokat találni. Ilyenek például:

$$z = C \cosh a_1 A x \cosh a_2 A y$$

$$z = C e^{a_1 A x} \cosh a_2 A y$$

$$z = C e^{A(a_1 x + a_2 y)}$$

(a_1 és a_2 kielégíti az $a_1^2 + a_2^2 = 1$ relációt, különben tetszőlegesek).

Nem könnyű feladat ellenben megkeresni, hogy ezeknek a megoldásoknak megfelelő folyadékfelületek milyen edényekben állanak elő; vagyis a partikuláris megoldáshoz megtalálni a megfelelő határfeltételeket, amelyek mellett ez a partikuláris megoldás az alapegyenletnek egyetlen lehetséges megoldása. Bár több ilyen egyenlethez találtam megfelelő edényt, s a hozzárendelés szimmetria-feltételek alapján meglehetősen valószínűnek is látszik, a bizonyítást szigorúan elvégezni az eddig ismertetetteket leszámítva egyetlen esetben sem sikerült.

Legyenek — példának okáért — az edény falai függőleges síkok (a keresztmetszet legyen konvex sokszög), ezeknek a síkoknak az xy síkkal (amely legyen azonos a normálnívóval, az origo pedig legyen a felszín csúcspontja alatt) való metszéspontjainak egyenletei:

$$x \cos \varphi_k + y \sin \varphi_k - d_k = 0. \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

Ebben az edényben előálló folyadékfelszín egyenlete:

$$z = \sum_{k=1}^n c_k e^{A(x \cos \varphi_k + y \sin \varphi_k - d_k)} \quad (18)$$

ahol a c_k -k hosszúság dimenzióval bíró állandók, melyek az edény keresztmetszetét jelentő sokszög megfelelő oldalának

¹ Anélkül, hogy külön hangsúlyoznók, természetesen mindig csak a felszín «közel vízszintes» részeire szorítkozunk.

hosszúságától függenek valamilyen bonyolult módon, továbbá minden esetben kielégítik a

$$\sum_{k=1}^n c_k \cos \varphi_k e^{-A d_k} = 0 \quad \sum_{k=1}^n c_k \sin \varphi_k e^{-A d_k} = 0 \quad (19)$$

feltételeket, mert — az origo a meniszkusz csúcsa alatt lévén —

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{x=0, y=0} = 0; \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{x=0, y=0} = 0 \text{ mindenesetre fennáll.}$$

Ha az edény keresztmetszete szabályos sokszög, úgy nyilván

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$$

és, mivel szimmetria-okokból a csúcspont a sokszög középpontjában van, azért

$$d_1 = d_2 = \dots = d_n = d,$$

továbbá

$$\varphi_k = \varphi_1 + (k-1) \frac{2\pi}{n}.$$

(18) ekkor a következő alakú lesz:

$$z = c \sum_{k=1}^n e^{A \left[x \cos \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) + y \sin \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) - d \right]}. \quad (20)$$

A (19) feltételek itt minden további kikötés nélkül teljesülnek, lévén

$$\sum_{k=1}^n \cos \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) \equiv 0$$

és

$$\sum_{k=1}^n \sin \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) \equiv 0,$$

amint arról az ismert összegképletek alkalmazásával egyszerűen meggyőződhetünk.

A (20) egyenlet ugyanazokat a szimmetria-viszonyokat tünteti fel, mint az n oldalú szabályos sokszög. Ez utóbbi ugyanis középpontja körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel, vagy ennek egész többszöröseivel elforgatva, önmagába megy át. A (20) egyenlet is invariáns a koordinátarendszernek $\frac{2\pi}{n}$, illetőleg ennek egészszámú többszöröseivel való elforgatásával szemben.

Minthogy H az emelkedési magasságot jelenti ($[z]_{x=0}^{y=0} = H$), azért (20) alapján

$$H = cne^{-Ad},$$

tehát (20) így is írható:

$$z = \frac{H}{n} \sum_{k=1}^n e^A \left[x \cos \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) + y \sin \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) \right] \quad (20^*)$$

Vizsgáljuk (20*) speciális eseteit.

Az egyenlőoldalú háromszög keresztmetszetű edényben fellépő folyadékfelszín egyenlete például, ha a pozitív x tengelyt az egyik (például az 1-es indexű) háromszögoldalra merőlegesen vesszük fel (tehát $\varphi_1 = 0$):

$$z = \frac{H}{3} \left(e^{Ax} + 2e^{-\frac{1}{2}Ax} \cosh \frac{\sqrt{3}}{2} Ay \right). \quad (21)$$

Hasonlóképpen a négyzet keresztmetszetű edényben (ugyan-csak $\varphi_1 = 0$ mellett):

$$z = \frac{H}{2} \left\{ \cosh Ax + \cosh Ay \right\}. \quad (22)$$

Ha pedig az x tengelyt a négyzet átlójába helyezzük, (tehát $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$):

$$z = H \cosh \frac{A}{\sqrt{2}} x \cosh \frac{A}{\sqrt{2}} y.$$

Érdekes ennek az egyenletnek a hasonlósága az

$$x = \frac{d}{2}, x = -\frac{d}{2}; y = \frac{d}{2}, y = -\frac{d}{2}$$

egyenesek határolta négyzet-membrán

$$w = M \cos \frac{(2m+1)\pi}{d} x \cos \frac{(2n+1)\pi}{d} y$$

amplitudo-egyenletéhez.

Keressük a felszín egyenletét téglalap-keresztmetszetű edényben. Szimmetria-viszonyok folytán a csúcspont nyilván az átlók

metéspontjában lesz és így $d_1=d_3$, $d_2=d_4$; a c konstansokról mondottak alapján pedig $c_1=c_3$, $c_2=c_4$. Bevezetve a $2c_1e^{-Ad_1}=C_1$, $2c_2e^{-Ad_2}=C_2$ jelöléseket, (18) alapján a keresett egyenlet a következő lesz:

$$z = C_1 \cosh Ax + C_2 \cosh Ay. \quad (23)$$

C_1 és C_2 -nek ki kell elégíteni a $C_1+C_2=H$ feltételt, lévén $[z]_{x=0}^{y=0}=H$.

Az ebben a paragrafusban elmondottak természetesen lényegében a sejtés jellegével bírnak. Addig is, amíg kielégítő módon bizonyítani nem tudom ezeket az állításokat, legyen szabad a következőkre rámutatnom:

a) Dolgozatom harmadik részében a (23) formuláról kvantitativé, a (21)-ről kvalitatívé kimutatom, hogy a tapasztalattal egyezik, vagyis téglalap, illetőleg szabályos háromszög keresztmetszetű edényben előálló folyadékfelszín valóban ilyen alakú.

b) A (20) formuláról, vagyis a szabályos n szög keresztmetszetű edényben fellépő folyadékfelszín alakjáról a következő paragrafusban kimutatom, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén átmegy a kör keresztmetszetű edényben előálló, vagyis a forgásfelület alakú folyadékfelszín egyenletébe, azaz (20) jobboldala $n \rightarrow \infty$ -re lényegében véve az elsőfajú 0-adrendű BESSEL-függvénybe megy át.

6. §. Néhány tétel a szabályos n oldalú sokszög keresztmetszetű edényben előálló folyadékfelszínekről.

1. Kimutatjuk, hogy $n \rightarrow \infty$ -re a folyadékfelszín egyenlete a forgásfelületekre levezetett egyenletbe megy át, vagyis (v. ö. (20*) és (14)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H}{n} \sum_{k=1}^n e^{A \left[x \cos \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) + y \sin \left(\varphi_1 + k-1 \frac{2\pi}{n} \right) \right]} = HI_0(Ar).$$

Vezessünk be (20*)-ban hengerkoordinátákat:

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

tehát

$$z_n = \frac{H}{n} \sum_{k=1}^n e^{Ar \cos \left(\varphi_1 - \vartheta + k-1 \frac{2\pi}{n} \right)} \quad (20^{**})$$

A jobboldalon álló kifejezés az $f(t) = \frac{H}{2\pi} e^{Ar \cos t}$ evidensen integrálható függvény egy téglányösszege a $(\varphi_1 - \vartheta, \varphi_1 - \vartheta + 2\pi)$ intervallumra. Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \int_{\varphi_1 - \vartheta}^{\varphi_1 - \vartheta + 2\pi} \frac{H}{2\pi} e^{Ar \cos t} dt.$$

Tekintettel arra, hogy

$$J_0(-ix) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} dt^1$$

és $I_0(x)$ páros függvény, ezért valóban

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = H I_0(Ar)$$

q. e. d.

2. Tekintsük mindazokat a szabályos sokszög keresztmetszetű edényekben előálló folyadékfelszíneket, amelyekre A és H ugyanaz. Messük ezeket képzeletben egy r sugarú hengerfelülettel, a henger tengelye legyen a z tengely. (A metszés természetesen ne változtassa meg a folyadékfelszín eredeti alakját.) Állítás:

Mindezen folyadékfelszínek esetén — a sokszög oldalszámától függetlenül — a hengernek ugyanakkora felületű része esik a normálnívó és a folyadékfelszín közé.

Más fogalmazásban: Mindezen felszíneknél az origo körül r sugárral rajzolt kör mentén vett ordináta-értékek integrálközepe ugyanaz.

Állításunk bizonyítása céljából azt kell kimutatnunk, hogy $\int_0^{2\pi} z_n ds$, ds -el jelölve a kérdéses r sugarú kör ívelemét, n -től független.

$ds = r d\vartheta$ lévén, a cosinus függvény periodicitására való tekintettel (20**) alapján

$$\int_0^{2\pi} z_n ds = r \frac{H}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} e^{Ar \cos \vartheta} d\vartheta = Hr \int_0^{2\pi} e^{Ar \cos \vartheta} d\vartheta = 2\pi r H I_0(Ar),$$

¹ HANSEN-formula speciális esete (L. pl. JAHNKE—EMDE: Funktionen-tafeln. 1909, 169. lap.)

amivel állításunkat igazoltuk: a kérdéses felszín, illetőleg integrálközép mindig ugyanakkora, mint a körkeresztmetszetre vonatkozó megfelelő érték.

Hasonló állítást tehetünk a fent leírt hengernek a normálnívó és a folyadékfelszín közé eső részének térfogatáról, azaz a z értékeknek a kérdéses r sugarú kör teljes felszínére vonatkozó integrál-közepére vonatkozóan is.

KÍSÉRLETI RÉSZ.

7. §. Előzmények.

A bevezetésben már jelzett új kísérleti módszer lényege az egyenlő vastagsági (FIZEAU-féle) fényinterferencia-görbéknek alkalmazása folyadékfelszínek alakjának tanulmányozására. A fényinterferencia, úgyszintén a diffrakció jelenségének folyadékok felszíni tulajdonságainak vizsgálatánál való felhasználása nem ismeretlen. KALÄHNE például kapilláris hullámok hullámhosszúságát határozta meg úgy, hogy a rezgésben lévő folyadékfelszínre nagy beesési szög alatt vetített fényt s a felszínről, mint optikai rácsról visszavert nyalábban az elhajlási szögeket megmérte.¹ SATTERLY és STUCKEY függőleges, sík lapon lefolyó igen vékony folyadékréteget vizsgáltak a FIZEAU-féle csíkok segítségével.² Egészen más természetű célokra ugyan, de a nyugvó folyadékfelszínen előálló egyenlő vastagsági görbéket is alkalmazták már. A berlini Physikalisch Technische Reichsanstaltban ugyanis megkísérelték csiszolatok sík voltát úgy ellenőrizni,³ hogy a kérdéses csiszolat és igen nagy kiterjedésű, tehát tökéletesen síknak feltételezhető ricinus- vagy glicerinfelszín között állították elő a kérdéses görbéket. A módszer ügylátszik nem vált be, mert amint az idézett értekezésekből is látszik, elhagyták s rátértek a három üveglapos vizsgálati módszerre.

¹ Ann. d. Phys. 7. 1902, p. 440.

² Transactions of the Roy. Soc. of Canada, (3), 26, Sect. III., 1932 p. 131.

³ BRODBUN—SCHÖNROCK: Zeitschr. f. Instr.-kunde 22, 1902. p. 355
EINSPORN: u. o. 57, 1937. p. 265. LANDWIHR: u. o. 62, 1942. p. 80.

8. §. A módszer ismertetése.

Állítsuk elő az egyenlő vastagsági görbékét folyadékfelszín és sík lap között. Ez a legcélszerűbben a MICHELSON-féle berendezéssel történhet. Itt nem vagyunk ugyanis kitéve annak a veszélynek, hogy a síklap esetleg érintkezésbe kerül a folyadékfelszínnel, amivel egyrészt eltorzítja azt, maga pedig beszennyeződik. A MICHELSON-féle készülékben előálló interferencia-jelenség pontosan ugyanaz, mintha az interferencia a folyadékfelszín és a 2. számú tükörnek az 1. számú tükör adta virtuális képe között jönne létre. (2. ábra, l. 348. old.) Ezt a virtuális síkot a továbbiakban referencia-síknak fogjuk nevezni. Virtuális lévén, nyugodtan érintkezésbe jöhet a folyadékfelszínnel, sőt annak a belsejébe is kerülhet, nem fogja eltorzítani azt.

Az interferencia-rendszer előállítására homogen, λ hullámhosszúságú parallel fénynyalábot használjunk úgy, hogy az merőlegesen essék a referencia-síkra. Egy-egy interferencia-csík mentén a folyadékfelszín távolsága a referencia-síktól állandó és két szomszédos interferencia-csík helyén a megfelelő két távolság különbsége $\frac{\lambda}{2}$. Egy additív konstanstól eltekintve ezzel

az összes interferencia-csíkok helyén ismerjük a folyadékfelszín távolságát a referencia-síktól; tehát bármelyik interferencia-csík mentén megmérhetjük a folyadékfelszín koordinátáit, ha a koordinátarendszer (ξ, η) síkját a referencia-síkban, vagy ezzel párhuzamosan vesszük fel, s az origót ennek a síknak egy tetszőleges pontjában kijelöljük. Legcélszerűbb az interferencia-rendszerrel fényképfelvételt készíteni s a negatívot koordinátamikroszkópon, vagy mikrofotométerrel kimérni. A nehézség csak az interferencia-csíkok «helyének» megállapításában van. A csíkok gyakorlatilag mindenesetre a referencia-síkon keletkeznek, ha ez eléggé közel van a folyadékfelszínhez.¹ Egy-egy csík «helyén» mindenesetre az illető csík maximális elsötétedési pontjait összekötő görbét kell érteni. Ez bár nem mindig esik pontosan egybe a csík középvonalával, mégis, elég kicsiny görbületű felszínek-

¹ V. ö. SOHNKE—WANGERIN: Wied. Ann. 12, 1881, p. 245.

nél, olyan közel van hozzá, hogy gyakorlatilag helyettesíthető azzal.

Mint hogy két szomszédos csik mentén a rétegvastagság-különbség igen kicsiny $\left(\frac{\lambda}{2}(=)0.2\mu\right)$, azért a módszer elsősorban igen kis görbületű felszínnek vizsgálatára alkalmas. Másfelől azonban éppen ezért a folyadékot és a készüléket a legkisebb rázkódástól és hőmérsékletváltozástól is óvni kell.

A felszín számos pontjában történt koordinátameghatározás után két különböző út között választhatunk:

a) Interpoláció segítségével meghatározhatjuk az interferencia-csikkokkal borított folyadékfelszín bármelyik pontjának koordinátáit, ezzel a felszín alakjáról kísérleti képet nyertünk. Ha a felszín egy pontjában a referencia-síkkal alkotott hajlásszöget akarjuk kiszámítani, ez numerikus differenciálással eszközölhető. Szimmetria-megfontolások alapján sok esetben a referencia-síknak a vízszinteshez való hajlása is kiszámítható, tehát a folyadékfelszínnek a vízszintessel bezárt szögét is megkaphatjuk. Újabb numerikus differenciálás útján a felszín görbülete számítható ki, annak bármelyik pontjában. Ha a felszín helyzetét az edényhez is rögzíteni akarjuk, akkor vagy gondoskodnunk kell róla, hogy felvételünkön az edény is rajta legyen még, vagy pedig az edényről egy újabb felvételt készítünk és valami módon (például a referencia-síkra karcolt koordinátaszerű hálózat segítségével) gondoskodunk arról, hogy a két felvételen az azonos pontok felismerhetők legyenek.

b) A folyadékfelszín egyenletét transzformáljuk a referencia-síkhöz rögzített koordináta-rendszerre; a mérések útján meghatározott koordinátákat behelyettesítjük ebbe az egyenletbe; az egyenletben szereplő konstansokat a legkisebb négyzetek módszerével kiszámítjuk. Ily módon a referencia-sík helyzetére, a folyadékfelszín helyzetére, alakjára, feszültségére vonatkozó összes adatok egyetlen fényképfelvétel útján kiszámíthatók.¹ Az egyen-

¹ A felszín alakjának az edényhez való rögzítése a felszín csúcspontjának a fényképfelvételen való kijelölésével történik. A felszín csúcspontjának az edényhez viszonyított helyzete ugyanis a legtöbb esetben ismeretes. A csúcspont kijelölése a fényképfelvételen az a) eljárásnál csak körülbelül volna lehetséges.

letben szereplő konstansok ismeretében a felszín alakját matematikai formában írhatjuk le. Ennek az elméleti alaknak a kísérleti adatokkal való megegyezése egyúttal bizonyíték az elméleti megfontolások, vagyis a levezetett egyenlet helyességére is. A fényképfelvételeken egy metszetben átlag 80—100 interferencia-csík van, de némelyik felvételen ez a szám eléri a 200-at is. Ha mindegyik interferencia-csík átlagban csak 10 pont koordinátáit határozzuk meg, ez egyrészt 2000 koordinátamérést, azonkívül 1000 transzcendens hatismeretlenes egyenletből álló rendszer kiegyenlítését jelenti. A gyakorlati megvalósítás céljából tehát az eljárást egyszerűsíteni kell. E célból

a) a folyadékfelszínnek egyszerre csak egy metszetét vizsgáljuk;

β) külön-külön egyenlítjük ki a referencia-sík helyzetét jellemző és a folyadékfelszínt jellemző két-két fontos állandót;

γ) a többi, kevésbé fontos állandónál megelégszünk azoknak a négy, már ismert konstans segítségével egy egyenletből törtenő meghatározásával.

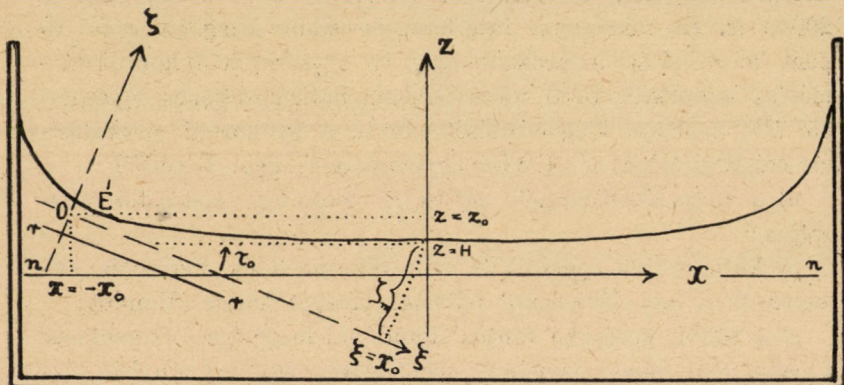
A következő két paragrafusban ezt az eljárást mutatjuk be a folyadékfelszín két fő típusán: két párhuzamos vízszintes alkotójú hengerszimmetrikus test között előálló hengerszimmetrikus és a forgástengelyt metsző forgásszimmetrikus folyadékfelszíneken.

9. §. Két párhuzamos, vízszintes alkotójú hengerszimmetrikus test között előálló hengerszimmetrikus felszín tárgyalása.

A referencia-síkot az alkotókkal párhuzamosra állítva elérhetjük, hogy az interferencia-csíkok párhuzamos egyenesek legyenek, vagyis maguk az interferencia-csíkok a felszín alkotóinak tekinthetők. (L. 1. kép.)

Mindenekelőtt transzformálni kell a kiindulási egyenletet, (6)-t. Az új (ξ, η, ζ) koordinátarendszer (ξ, η) síkja legyen párhuzamos a referencia-síkkal, éspedig úgy, hogy a referencia-síkhoz legközelebb eső, vagyis első csík ordinátája $\frac{\lambda}{2}$ legyen. Az n -ik csík ordinátája ekkor $n \frac{\lambda}{2}$, ha pedig a ζ tengelyen hosszegységnek a

$\frac{\lambda}{2}$ mm-t választjuk, akkor a kérdéses koordináta egyszerűen n . A ξ tengelyt irányítsuk merőlegesen az alkotókra (azaz az interferencia-csíkokra), és pedig úgy, hogy a felszín csúcspontjának abszcisszája pozitív legyen (1. ábra). Az origót a ξ tengely tetszőleges pontjában jelöljük ki, koordinátái az (x, y, z) rendszerben



1. ábra.

nn : normálnívó
 rr : referencia-sík

E : érintési pont
 Az ábra erősen torzított.

legyenek $(-x_0, 0, z_0)$. A referencia-sík normálisának, vagyis a ξ tengelynek a z tengellyel bezárt szögét jelöljük τ_0 -al. A koordináta-transzformáció ismert képletei szerint

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \tau_0 + \zeta \sin \tau_0 - x_0 \\ y &= \eta \\ z &= -\xi \sin \tau_0 + \zeta \cos \tau_0 + z_0. \end{aligned}$$

τ_0 igen kicsiny lévén (átlag 0.1–30 perc között van), $\sin \tau_0$ helyébe τ_0 , $\cos \tau_0$ helyébe 1 írható. Transzformáció-egyenleteink tehát:

$$\begin{aligned} x &= \xi - x_0 \\ y &= \eta \\ z &= \zeta - \tau_0 \xi + z_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Beírva ezeket (6)-ba, a felszín egyenlete a (ξ, η, ζ) rendszerben:

$$\zeta - \tau_0 \xi + z_0 = H \cosh A(\xi - x_0). \quad (25)$$

A folyadékfelszínnek egyszerre mindig csak egy, az alkotókra merőleges metszetét $((\xi, \zeta)$ metszet) vizsgáljuk. A számítást a megfelelő koordináták meghatározása után a referencia-sík két legfontosabb állandójának: x_0 és τ_0 -nak kiszámításával kezdjük. x_0 ismerete elegendő a felszín csúcspontjának a felvételen való kijelöléséhez, τ_0 pedig a referencia-síknak a vízszinteshez való hajlását adja meg.

a) x_0 és τ_0 számítása.

Ha ξ_{1i} és ξ_{2i} két olyan abszcissza, hogy $\frac{\xi_{1i} + \xi_{2i}}{2} = x_0$ és ζ_{1i}, ζ_{2i} a hozzájuk tartozó megfelelő ordináta, úgy (25) alapján

$$\frac{\zeta_{2i} - \zeta_{1i}}{\xi_{2i} - \xi_{1i}} = \tau_0. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

Megkeressük tehát azt az abszcissza-értéket, amelyre szimmetrikus abszcisszákhöz tartozó különbségi hányados állandó, ez az abszcissza-érték nem más, mint x_0 . A gyakorlatban a számítás úgy alakul, hogy megfelelően felvett, ekvidisztans $x_0^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) értékekre szimmetrikusan képzett $\xi_{1i}^{(k)}, \xi_{2i}^{(k)}$ értékekkel¹ a

$$(\zeta_{2i}^{(k)} - \zeta_{1i}^{(k)}) - \tau_0^{(k)} (\xi_{2i}^{(k)} - \xi_{1i}^{(k)}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletekből $\tau_0^{(k)}$ értékét kiegyenlítjük. A fennmaradó középhibanegyzeteket, mint $x_0^{(k)}$ függvényét ábrázolva, a tapasztalat szerint parabolát nyerünk. A parabola csúcsa, vagyis a középhibák minimuma nyilván $\xi = x_0$ -nál van. Ennek alapján tehát a $\tau_0^{(k)}$ értékek középhibanegyzeteinek parabolikus kiegyenlítése segítségével x_0 , ennek ismeretében a két szomszédos $x_0^{(k)}$, illetőleg a nekik megfelelő $\tau_0^{(k)}$ értékek közé való lineáris interpolációval τ_0 értéke meghatározható.²

¹ Minthogy ezek az értékek nem egészen tetszőlegesek már, ezért nem azonosak szükségképpen a megmért koordinátákkal, illetőleg nem választhatók mind ezek közül. A megfelelő $\xi_{1i}^{(k)}, \xi_{2i}^{(k)}$ értékeket ezért kvadratikus interpolációval határoztam meg.

² A kísérleti adatok tanúsága szerint nem túlságosan nagy intervallumban a $\tau_0^{(k)}$ értékeknek az $x_0^{(k)}$ értékektől való függése kielégítően lineárisnak tekinthető.

(26)-ból látható, hogy a ξ -ket mm-ben, a ζ -kat $\frac{\lambda}{2}$ mm-ben mérve az x_0 -t mm-ben, a τ_0 -t pedig $\frac{\lambda}{2}$ radianokban kapjuk meg.

b) A és H számítása.

A folyadékot jellemző e két fontos állandó meghatározása céljából mindenekelőtt számítsuk ki bizonyos számú x értékhez a megfelelő $z-H$ értékeket, vagyis a folyadékfelszínnek a saját csúcspontja feletti magasságát. Ez a következőképpen történhet:

(25) alapján, ha abban $\xi = x_0$,

$$H = \zeta_m - \tau_0 x_0 + z_0,$$

ahol ζ_m jelenti a felszín csúcsának a referencia-sík feletti magasságát ($\zeta = \zeta_m$, ha $\xi = +x_0$; v. ö. 1. ábra). ζ_m értéke kvadrátikus vagy grafikus interpolációval meghatározható.

Mármost (24) tekintetbevételével

$$z - H = \zeta - \zeta_m - \tau_0(\xi - x_0)$$

$\xi - x_0 = x$ lévén (24), innen a megadott x -hez tartozó $z-H$ kiszámítható.

(6) alapján

$$z - H = H(\cosh Ax - 1). \quad (27)$$

Körülbelül harminc-ötven x értékhez meghatározva a megfelelő $z-H$ értéket, (27)-ből A és H kiegyenlíthető. (27) transzcendens egyenlet lévén A -ra, ismernünk kell azonban A és H egy-egy közelítő értékét. Ezeket a következő grafikus eljárással határozhatjuk meg:

Az

$$x = 10^u, \quad z - H = 10^v,$$

valamint a

$$\cosh t - 1 = f(t)$$

jelölésekkel (27) a következő alakban írható:

$$v - \log H = \log f(10^u + \log A). \quad (27a)$$

Ez a görbe nyilván parallel eltolással származik a

$$v = \log f(10^u) \quad (27b)$$

görbéből. A (27a) görbét úgy rajzolhatjuk meg, hogy a $\log x = u$ értékekhez a $\log(z-H) = v$ értékeket, a (27b) görbét pedig, ha a cosh táblázat segítségével a $\log x$ értékekhez a $\log f(x)$ értékeket rajzoljuk fel. Ez utóbbi görbét külön, áttetsző lapra rajzoljuk és úgy helyezzük az első görbére, hogy a két görbe — a koordináta-tengelyek párhuzamos állása mellett — fedje egymást. A két koordináta-rendszernek egymáshoz viszonyított helyzete $\log H$ és $-\log A$ -t adja meg.¹

(27)-ből látható, hogy x -et mm-ben, $z-H$ -t $\frac{\lambda}{2}$ mm-ben mérve A -t mm⁻¹-ben (azaz $a = \frac{\sqrt{2}}{A}$ -t mm-ben) és H -t $\frac{\lambda}{2}$ mm-ben nyerjük. A kapilláris állandó kiszámításához tehát nem kell ismernünk a kísérletben felhasznált fény hullámhosszát.

c) A többi konstans meghatározása.

Mindenekelőtt (25) alapján

$$z_0 = H + \tau_0 x_0 - \zeta_m.$$

Kiszámíthatjuk továbbá a folyadékfelszínnek a $(\xi\eta)$ síkhoz legközelebb fekvő pontjának abszcisszáját is. Ebben a pontban ugyanis $\frac{d\zeta}{d\xi} = 0$ lévén, a kérdéses adatok (25)-ből minden további nélkül kiszámíthatók. Ez a pont jellemző pontja a folyadékfelszínnek és a referencia-síknak együttesen: Ebben a pontban érintené ugyanis a folyadékfelszínt a referencia-sík, ha utóbbit önmagával párhuzamosan eltolnók; ezért ezt a pontot a továbbiakban érintési pontnak nevezzük.

R_m -el jelölve a felszín (véges) főgörbületi sugarát a csúcspontban, akár (25), akár (6) alapján

$$R_m = \frac{1}{A^2 H}.$$

(25) alapján egyébként a felszín bármelyik pontjában meghatározható a kérdéses főgörbületi sugar.

¹ A hosszadalmas logaritmuskeresések elkerülhetők, ha logaritmikus milliméterpapirost használunk. Ebben az esetben a fedés után azonnal a H , illetőleg $\frac{1}{A}$ értékeket olvashatjuk le.

10. §. A forgástengelyt metsző forgásfelület alakú felszínnek tárgyalása.

Minthogy egy forgásfelület szimmetrikus mindegyik meridián-síkjára, azért kell, hogy egy forgásfelületről készült interferencia-görberendszernek legyen szimmetria-tengelye (l. 2. kép), s ez a szimmetria-tengely nyilván a referencia-síkra merőleges meridián-síknak a referencia-síkkal való metszési egyenese. A szimmetria-tengely tehát átmegy az érintési ponton¹ és a felszín csúcs-pontja felé mutat.

A (14) egyenletből indulunk ki. Először olyan (x, y, z) koordinátarendszerre transzformáljuk, amelynek origója a (z, r, φ) rendszer origójával megegyezik és az (x, z) síkja merőleges a referencia-síkra. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ alapján (14) a következő alakú lesz:

$$z = HI_0(A \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (14a)$$

Ezekután legyen a (ξ, η, ζ) koordinátarendszer (ξ, η) síkja ismét párhuzamos a referencia-síkkal, úgy, hogy a legbelső csík ordinátája $\frac{\lambda}{2} (=1)$ legyen.² A ξ tengely legyen a görbék szimmetria-tengelye,³ vagyis feküdjék benne az (x, z) síkban. Az origo legyen ismét a ξ tengely egy tetszőleges pontja. A transzformáció-egyenletek ugyanazok, mint az előző paragrafusban és éppúgy egyszerűsödnek a τ_0 kicsinysége folytán. (14a) tehát a következő alakba megy át:

$$\zeta - \tau_0 \xi + z_0 = HI_0(A \sqrt{(\xi - x_0)^2 + \eta^2}). \quad (28)$$

Ez az egyenlet írja le a 2. képen látható görberendszert is. Egy-egy görbe egyenletét nyerjük, ha ζ helyébe egy-egy egész-számú konstanst helyettesítünk.

¹ Az érintési pont definíciója itt is és a többi esetekben is ugyanaz, mint a hengeres felszínéknél, 9. §.

² Az 1. számú ábra felfogható egy forgási szimmetriát mutató felszín meridiánmetszetének is.

³ Ez a fényképfelvételen meghatározható.

Vizsgáljuk folyadékfelszínünknek a (ξ, ζ) meridiánmetszetét. Ennek egyenlete:

$$\zeta - \tau_0 \xi + z_0 = HI_0(A(\xi - x_0)). \quad (28a)$$

Ez az egyenlet éppúgy tárgyalható, mint a (25). x_0 és τ_0 , A és H , z_0 , valamint az érintési pont koordinátái pontosan ugyanúgy határozhatók meg belőle, mint a 9. §-ban. Az A és H meghatározására adott grafikus eljárás is értelem szerint alkalmazható, a kapilláris állandó meghatározásához itt sem szükséges a felhasznált fény hullámhosszának ismerete. Ha R_m -el a felszín csúcspontjabeli két (egyenlő hosszú) főgörbületi sugár egyikét jelöljük, akkor itt $I''_0(0) = \frac{1}{2}$ miatt $R_m = \frac{2}{A^2 H}$.

Más metszeteket is bevonhatunk a vizsgálatokba. Bármelyik $\eta = \text{const}$ metszetből τ_0 és x_0 értéke, bármelyik meridiánmetszetből pedig A és H értéke ugyanúgy számítható ki, mint azt már leírtuk.

Végezetül a 2. képen látható s a (28) egyenlet által jellemzett interferencia-görbesereg egy érdekes tulajdonságára szeretnék rámutatni. A görberendszer szimmetria-tengelyén (vagyis a ξ tengelyen) jelöljük ki a felszín csúcának megfelelő (vagyis a $+x_0$ abszcisszájú) pontot. Tekintsük az összes, ezen pont köré írható köröket. Állítás:

Bármelyik körnek bármely két szomszédos görbével alkotott két metszéspontjának abszcisszákülönbsége (a ξ koordináták különbsége) ugyanaz, éspedig $\frac{1}{\tau_0}$ val egyenlő. A bizonyítás (28)-ból triviális. Az x_0 és τ_0 értékek meghatározása ennek alapján is lehetséges.

*

MÉRÉSEK.

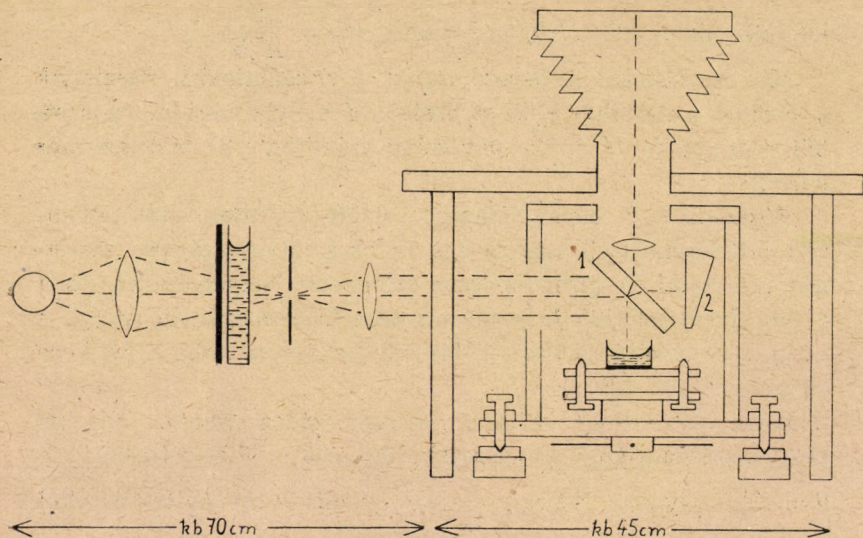
11. §. A kísérleti berendezés.

Méréseim célja nem már amúgy is jól ismert konstansok még pontosabb meghatározása, hanem az elméleti meggondolások kísérleti alátámasztása s az új módszer használhatóságának igazolása volt. A jelenlegi berendezés a kísérleti vizsgálat céljára tervezett első ilyen készülék. Ez az eddigi tapasztalatok szerint

több tekintetben lényeges tökéletesítésre szorulna, azonban a fentemlített célnak kielégítően megfelelt. A kivitelezésnél főleg anyagi okok játszottak közre, ugyanis nagyobb pontosság elérése jelentékenyen költségesebb készüléket kívánt volna meg.

A teljes berendezés vázlatos rajza a 2. ábrán látható.

Homogén fénynyalábot higany-ivlámpa fényének két milliméter vastag sötét kobaltüvegen és 2 cm vastag rétegben alkalmazott 8%-os kininszulfátoldaton való szűrésével állítottam elő. Ily módon gyakorlatilag csak a kék vonalesoport (átlagban $\lambda = 435.8 \mu\mu$) szerepelt a nyalábban.



2. ábra.

Az optikai berendezés lényege két tükör:¹ Az 1. számú tükör 5 cm átmérőjű 6 mm vastag planparallel üvegkorong, a 2. számú tükör 5 cm átmérőjű kétoldalt plan felületekkel határolt prizmatikus korong, legkisebb vastagsága 3 mm, legnagyobb vastagsága 14 mm. Azért készült prizmatikusra, hogy a hátlapjáról reflektált fény ne zavarjon. Elülső lapjára hálózattal van kareolva,

¹ Az eredeti MICHELSON-féle interferométerben még egy közbenső planparallel lemez is van az optikai úthosszak és intenzitások kiegyenlítésére. Ez itt mellőzhető.

ennek adatait komparátorral kimértem. A hálózat úgy készült, hogy alkalmas legyen a 7. §. a) pontjában jelzett azonosításra,¹ másik fontos rendeltetése a nagyítás meghatározása. Mindkét tükröt a Magyar Optikai Művek cég készítette, garantálva, hogy egy teljes felületen a tökéletes síktól való legnagyobb eltérés legfeljebb egy interferencia-csíknak felel meg, azaz $0.2-0.3 \mu$ -nál kisebb. Ellenőrző méréseim ezt megerősítették.

Mivel az 1. számú tükör nincs ezüstözve, ezért a készülékben két közel egyenlő intenzitású interferencia-rendszer is keletkezik. E két rendszer közül azonban csak az egyikben lehet az útkülönbség kicsiny. Másrészt a két rendszer a tér más-más helyén áll elő; ha tehát a fényképező objektív az egyik rendszerről ad éles képet, a másik interferencia-rendszernek gyakorlatilag el kell tűnnie. A fényképfelvételeken e két oknál fogva csak az egyik interferencia-rendszer látszik, a másik rendszer — eltekintve a látómezőnek adott egyenletes megvilágítástól — semmi zavart nem okoz.

Az interferencia-rendszer képét egy ZEISS mikroplanar ($f=5 \text{ cm}$, $\frac{f}{d}=4.5$) segítségével vetítettem a fényképező lemezre. A fénysugár útját a készülék előtt vízszintesre szabályoztam, a készülék után pedig függőlegesre. A referencia-sík igen közel vízszintes lévén, ezzel a mérőleges beesést elegendőképpen biztosítottam.

Az interferenciális eljárás érzékenységéből következik, hogy a folyadékfelszint és a készüléket egyrészt a legkisebb rázkódásoktól, másrészt a legkisebb hőmérsékletváltozásoktól is óvni kell. A rezgésmentesség céljából a méréseket szutterén helyiségben végeztem, a készüléket alacsony, szilárdan álló, nehéz asztalra helyeztem, magát a készüléket lehetőleg súlyosra készítettem, a vastalpak alá filcdarabokat helyeztem. Ily módon lehetséges volt közepes viszkozitású folyadékok (oliva-olaj, 50 %-os cukoroldat stb.) vizsgálata. Víz és hasonló viszkozitású anyagok-

¹ Az egymásmelletti hálózati vonalak távolságai egy origótól kiindulva számtani sor szerint nőnek. Ez a hálózat látható a fényképfelvételeken, azonban megkétszereződve, mert az 1. számú tükör mindkét felületét leképezi a prizma kérdéses felületét.

ról azonban az interferenciarendszer állandó rezgése miatt már nem lehetett kimérésre alkalmas fényképfelvételeket készíteni. Éjjeli mérések során szerzett tapasztalatok, amikor is a környezet (utcai közlekedés stb.) jóval nyugodtabb volt, arra mutatnak, hogy nyugodtabb környezetben¹ és főleg még sokkal stabilisabb készülék alkalmazásával ezek a zavarok kiküszöbölhetők. A hőmérséklet ingadozásának az expozíció tartama alatt 0.01°C -on belül kell lennie, hogy az interferencia-rendszer fényképezhető legyen.² Ez szintén minden további nélkül megoldható probléma. Az adott körülmények között azonban megelégedtem annyival, hogy lehetőleg alacsony (4–5 mm-es) folyadékréteget használtam, a készüléket kettős fémburokkal vettem körül és a kísérleti helyiség fűtését mellőztem. A leghosszabb expozíciós idő, amit a hőmérsékleti változás lehetővé tett, 90 sec volt. Tekintettel arra, hogy a higanylámpa fénye erős abszorbenseken haladt át, igen érzékeny negatívanyaggal kellett dolgoznom, ezek közül is a kék fényre érzékenyeket kellett választani. Igazán megfelelő lett volna a célra az AGFA gyár Spektral Blau Rapid lemeze. Ebből azonban a szállítási nehézségek folytán csak egy tucathoz tudtam hozzájutni. Jól használható volt a PERUTZ-féle Persenso és Perfo lemez. Az expozíciós idő általában 30 sec körül volt. Frissen betöltött folyadékfelszínnek azonban nem engedtek meg ilyen hosszú expozíciókat; meg kellett várni, míg a felszín megnyugszik, felveszi környezetének hőmérsékletét és végleges alakját. Egyetlen használható fényképfelvétel sem készült a betöltéstől számított 3–4 órán belül, némelyik pedig csak 24 óra elteltével. A folyadékfelszínnek az állás folyamán bekövetkező láthatatlan szennyeződése is csökkenti a felületi feszültséget; ez a csökkenés számított adatainknak az irodalmi értékekkel való összehasonlításánál jelentkezik is. A több órás várakozás természetesen elkerülhető, ha a kísérleti berendezést megfelelőképpen tökéletesítjük.

¹ A méréseket a város központjában, az I. számú Fizikai Intézet helyiségében végeztem.

² A hőtágulási együtthatót 0.001 -nek véve, 10 mm magas folyadékoszlop 0.01°C melegedésre $0.1\ \mu$ -al emelkedik, ami az interferenciarendszernek egy fél csikkal való eltolódását jelenti.

12. §. A fényképfelvételek feldolgozása.

A negatívokat, vagy esetleg diapozitívokat egy LEITZ-féle nagyítógépen 7—12-szeresre vetítettem ki,¹ milliméterpapirosra. Ezen a képen kikerestem a 9. és 10. §§-ban már definiált ξ tengelyt. Ezekután hegyes tűvel megjelöltem mindazokat a pontokat, amelyeknek koordinátáit meg akartam határozni. Megjelöltem még a nagyítás meghatározása céljából a hálózat rácspontjait is.

Ez az eljárás meglehetősen primitív. Nemcsak a kipontozásnál elkövetett hiba nagy, hanem hiba származhat még a negatív melegeedéséből, a vetítőobjektív esetleges torzításaiából s nem utolsósorban a milliméterpapiros pontatlanságából is. Tekintettel azonban arra, hogy a maximális pontosság eléréséről a készülék berendezésénél már amúgy is kénytelen voltam letenni, továbbá, mivel megfelelő (mikrométer-csavaros) koordináta-mikroszkóp vagy mikrofotométer amúgy sem állott rendelkezésre, az eljárást mégis állandóan alkalmaztam. A mérések kitűzött célját mindenesetre sikerült elérni vele, s az a körülményekhez képest meglepő pontosság, amit szolgáltatott, kedvező reményekre jogosít fel azzal a pontossággal szemben, amely az eddig említett könnyen kiküszöbölhető hibaforrások és tökéletlenségek eliminálása után elérhető.

A koordináta-meghatározások után a számítások lényegében úgy folytak le, mint azt a 9. és 10. §§-okban leírtuk. Mivel egy ilyen számítás még a mellékszámítások nélkül is rendkívül terjedelmes, azért kénytelenek vagyunk ezen a helyen csak a mérési eredményekre szorítkozni.

13. §. Mérési eredmények.

1. Hengerszimmetrikus felszínek.

Függőleges falú, 180×31.2 mm téglalap keresztmetszetű edény közepén vizsgáltam a felszínt. A fényképfelvételek egyenes csíkjaiból megállapítható, hogy a felszín egyik főgörbülete valóban elhanyagolhatóan kicsiny.²

¹ A fényképfelvételen magán a nagyítás már 3—4-szeres.

² Az interferencia-csíkok gyenge összetartása onnan eredhet, hogy a referencia-sík esetleg nem abszolút párhuzamos az alkotókkal, hanem 1—2 másodperces szöget zár be velük.

A fősúlyt a sokkal érdekesebb forgásszimmetrikus felszínnek vizsgálatára helyeztem, a hengerszimmetrikus felszínekről készült felvételek közül csak egyet, a 166. számút (l. 1. kép) mértem ki. A számított és mért alak megegyezése ebből az egy esetből is megállapítható.

A számítás a 9. §-ban leírt módon történt, az eredmények a következők:

166. sz. felvétel; 11.0°C ; ricinusolaj, $s_{\text{H}_2\text{O}} = 0.969$, 180×31.2 mm téglalap keresztmetszetű edény közepén.

$$a) \ x_0 = 2.223 \pm 0.003 \text{ mm}; \tau_0 = 4.17 \pm 0.02 \frac{\lambda}{2} \text{ radian} = 3'7.5'';$$

$$z_0 = 8.7 \pm 0.1 \frac{\lambda}{2} \text{ mm} = 1.90 \mu;$$

$$b) \ a = 2.66 \pm 0.01 \text{ mm}; \alpha = 3.41 \text{ mgs mm}^{-1}; H = 5.19 \pm 0.05 \frac{\lambda}{2} \text{ mm} = 1.13 \mu; R_m = 312 \pm 4 \text{ cm.}$$

A vizsgált folyadékfelszín alakját tehát a következő egyenlet jellemzi:

$$z = 5.19 \cosh 0.5324x \quad (\text{v. ö. (6)})$$

vagy, a (ξ, η, ζ) rendszerben:

$$\zeta - 4.171\xi + 8.71 = 5.19 \cosh 0.5324(\xi - 2.223). \quad (\text{v. ö. (25)})$$

Konstansaink pontosságáról s a (6) egyenlet helyességéről nyerhetünk képet, ha az adott ξ értékekhez tartozó észlelt ζ értékeket a felírt második egyenlet alapján számított ζ_{calc} értékekkel hasonlítjuk össze. Az 1. számú táblázat ξ értékét mm-ben, ζ és ζ_{calc} értékét $\frac{\lambda}{2}$ mm-ben tünteti fel.

Ha a határszöget ismerjük, akkor H értékét a (7) formula alapján számítás útján is meghatározhatjuk. Ricinusolaj határszögére az irodalomban adatot nem találtam. Mivel a ricinus közismerten eléggé nedvesít, ϑ -ját 20° -ra tehetjük. (A rosszabbul nedvesítő olivaolaj határszöge 22 — 35° között van.¹⁾ $\vartheta = 20^\circ$ és $d = 15.6$ mm mellett a (7) képletből $H = 0.82 \mu$, elég jó megegyezésben a kísérletileg meghatározott 1.13μ -al.

¹ QUINCKE: Wied. Ann. 1877.

1. sz. táblázat.

ξ	ζ	ζ_{calc}	Δ	ξ	ζ	ζ_{calc}	Δ
mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm
				+7.055	+55	+54.92	-0.08
				6.824	50	50.05	+0.05
				6.561	45	45.06	+0.06
				6.262	40	39.99	-0.01
				5.922	35	34.94	-0.06
				5.538	30	29.99	-0.01
				5.084	25	24.96	-0.04
				4.549	20	19.97	-0.03
-2.633	+15	+14.92	-0.08	3.903	15	14.98	-0.02
-2.227	10	9.98	-0.02	3.104	10	10.01	+0.01
-1.630	5	5.00	0.00	2.027	5	4.96	-0.04
-1.453	4	3.96	-0.04	1.785	4	4.07	+0.07
-1.248	3	2.96	-0.04	1.476	3	3.05	+0.05
-0.988	2	1.98	-0.02	1.111	2	2.05	+0.05
-0.582	1	0.99	-0.01	0.582	1	1.02	+0.02

2. Forgásszimmetrikus felszínek.

Függőleges alkotójú hengeres edényekben állítottam elő ezeket. Tizennégy fényképfelvételt mértem ki eddig. Ezek négy különböző edényben előálló öt különböző folyadékról készült kilenc különböző felszínre vonatkoznak. A főbb kísérleti adatokat a 2. sz. táblázat tünteti fel.

z_0 , τ_0 és H -t mindkét egységben ($\frac{\lambda}{2}$ mm, $\frac{\lambda}{2}$ radian, illetőleg mikron, perc) feltüntettem.

A 223. és 224. sz. felvételekből számított $z-H$ értékeket egyszerre egyenlítettem ki, ezért van a két felvételhez csak egy, közös a , a , H , R_m írva.

Vastagabb keretbe vannak foglalva azok az adatok, amelyeknek egymással egyezniök kell. Feltűnő, hogy ezeknek egymástól való eltérései sokszorososan felülmúlják a középhibákat. Valószínű, hogy ezek az adatok a különböző felvételek alatt valóban mások

2. sz. táblázat.

A felvétel száma	Hőmérs.	A vizsgált folyadék	Edény átmérő	Megjegyzések	x_0	z_0	τ_0	a	α	H	R_m
	°C		mm		mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm; μ	$\frac{\lambda}{2}$ rad; perc	mm	mgs/mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm; μ	cm
115	15.1	olivaolaj	36.2	Mind a három felvétel ugyarról a felszínről készült $s_{15/4} = 0.924$	1.22 ± 0.01	3.7 ± 0.1 $= 0.81 \mu$	0.551 ± 0.002 $= 0' 24.8''$	2.59 ± 0.01	3.10	3.40 ± 0.01 $= 0.740 \mu$	906 ± 1
117					4.12 ± 0.01	8.3 ± 0.1 $= 1.81 \mu$	3.53 ± 0.01 $= 2' 39''$	2.58 ± 0.01	3.07	3.33 ± 0.01 $= 0.726 \mu$	918 ± 1
118					0.274 ± 0.002	3.2 ± 0.1 $= 0.70 \mu$	0.178 ± 0.03 $= 0' 8.0''$	2.60 ± 0.01	3.13	3.37 ± 0.01 $= 0.734 \mu$	924 ± 3
140	12.8		29.4	Ugyanarról a felszínről készült felvételek $s_{15/4} = 0.926$	0.283 ± 0.001	16.9 ± 0.1 $= 3.68 \mu$	0.701 ± 0.004 $= 0' 31.5''$	2.56 ± 0.01	3.03	16.9 ± 0.1 $= 3.68 \mu$	178 ± 1
142					2.85 ± 0.01	28.4 ± 0.1 $= 6.19 \mu$	9.79 ± 0.03 $= 7' 20''$	2.57 ± 0.01	3.05	16.7 ± 0.1 $= 3.64 \mu$	181 ± 1
150	12.0		27.8	Ugyanarról a felszínről készült felvételek $s_{15/4} = 0.927$	0.573 ± 0.001	38.4 ± 0.1 $= 8.37 \mu$	3.22 ± 0.01 $= 2' 25''$	2.65 ± 0.01	3.25	38.0 ± 0.1 $= 8.29 \mu$	84.6 ± 0.1
151					3.09 ± 0.02	67.2 ± 0.3 $= 14.6 \mu$	24.5 ± 0.1 $= 18' 19''$	2.55 ± 0.01	3.01	36.1 ± 0.1 $= 7.86 \mu$	82.7 ± 0.1
154	11.9	ricinusolaj	27.8	$s_{15/4} = 0.968$	3.37 ± 0.01	84.8 ± 0.2 $= 18.5 \mu$	29.8 ± 0.1 $= 22' 19''$	2.69 ± 0.01	3.49	43.7 ± 0.1 $= 9.52 \mu$	75.8 ± 0.1
156			29.4		0.237 ± 0.001	27.6 ± 0.1 $= 6.01 \mu$	0.883 ± 0.003 $= 0' 39.7''$	2.66 ± 0.01	3.42	28.0 ± 0.1 $= 6.10 \mu$	116 ± 1
159			36.2		0.320 ± 0.001	4.5 ± 0.1 $= 1.09 \mu$	0.240 ± 0.001 $= 0' 10.8''$	2.62 ± 0.01	3.33	4.81 ± 0.01 $= 1.05 \mu$	656 ± 2
195	18.6	nátronlúg 36.7 % oldat	39.8	erősen szennyezett felszín $s_{15/4} = 1.397$	6.53 ± 0.04	21.1 ± 0.4 $= 4.60 \mu$	8.61 ± 0.02 $= 6' 27''$	2.91 ± 0.02	5.92	3.87 ± 0.06 $= 0.84 \mu$	1000 ± 20
204	18.2	cukoroldat 50.1 %	39.8	$s_{15/4} = 1.232$	5.86 ± 0.01	20.6 ± 0.2 $= 4.49 \mu$	8.29 ± 0.01 $= 6' 13''$	2.95 ± 0.02	5.36	5.12 ± 0.06 $= 1.12 \mu$	780 ± 11
223	19.0	19° C-on telített cukoroldat	36.2	Ugyanarról a felszínről készült felvételek $s_{15/4} = 1.329$; 66.9 %	1.81 ± 0.01	8.1 ± 0.1 $= 1.77 \mu$	1.94 ± 0.01 $= 1' 27''$	2.75 ± 0.02	5.01	6.8 ± 0.1 $= 1.49 \mu$	507 ± 9
224					0.674 ± 0.001	6.5 ± 0.1 $= 1.41 \mu$	0.602 ± 0.03 $= 0' 27.1''$				

voltak. Tekintetbe kell vennünk, hogy igen érzékeny adatokról, például mikron-rendű emelkedési magasságokról van szó, amelyeknél a legkisebb szennyezés is erős változást okozhat. Még két egymásutáni (117—118, 150—151, 223—224) fényképfelvétel között is legalább 15—20 perc telt el, mely idő alatt — mint-hogy az újabb felvételt mindig más érintési ponttal készítettem — a készülék falát le kellett emelni, s a kézzel meglehetősen közel (5—6 cm) kellett menni a folyadékfelszínhez. Ilyen nagy kiterjedésű folyadékfelszínek pedig könnyen szennyeződhetnek közben annyira, hogy ezek az egy-két százalékos eltérések bekövetkezzenek.

A kapilláris állandók irodalmi értékeit a 3. sz. táblázat tünteti fel.

3. sz. táblázat.

folyadék	sűrűség	%	hőmérs. C°	α mm	α mgs/mm	idézve:
oliva- olaj	0.910		20	2.67	3.23	Landolt—Börn- stein: Phys. Chem. Tabellen, 4. kiadás 1912; p. 124
	0.917		20	2.77	3.52	
	0.915		18	2.71	3.37	
ricinus-	0.961		18	2.78	3.71	Grunmach—Bein: Wiss. Abh. d. K. Normaleichungs- kommission 9, 1917
nátron- lúgoldat	1.397	36.7%	18.6	3.84	10.27	
cukor- oldat	1.232	50.1%	18	3.54	7.71	Domke—Reimer- des: Handbuch der Areometrie, 1912 Tafel 36, 37
	1.329	66.9%	19	3.44	7.86	

Kísérleti adatainknak az irodalmi értékektől való eltérésére más helyütt (11. §.) már megadtuk a magyarázatot. A nátronlúg és cukoroldat esetében mutatkozó nagyobb eltérés oka ezeknek a folyadékfelszíneknek, közelebbről határszögüknek a szennyezések iránt való nagyfokú érzékenysége. Nátronlúgoldat esetében hozzájárul még ehhez a nátronlúg karbonizálódása is, ami

különösen ilyen nagy kiterjedésű folyadékfelszínnél érezhető mértékben bekövetkezik.

A határszög ismeretében H a LAPLACE-formulából (8) számítással is meghatározható. A számított H -kat (H_{calc}) a 4. számú táblázat tünteti fel. Az eltérés érezhetően szisztematikus. Ennek oka a határszög nagyfokú változékonyságán kívül a LAPLACE-formula pontatlanságában is keresendő. Az irodalomban több helyen is történt már utalás arra, hogy a LAPLACE-formula túl kicsiny H -kat szolgáltat.¹

4. sz. táblázat.²

edény- átmérő	olivaolaj; $\vartheta=29^\circ$		ricinusolaj; $\vartheta=20^\circ$	
$2r$	H_{calc}	H_{obs}	H_{calc}	H_{obs}
mm	mikron		mikron	
27·8	5·2	8·1	6·8	9·5
29·4	3·5	3·7	4·6	6·1
36·2	0·6	0·7	0·8	1·0

A vizsgált folyadékfelszínek egyenleteit felírhatjuk oly módon, hogy a 2. sz. táblázat konstansait akár a (14), akár a (28) egyenletbe behelyettesítjük. Vizsgáljuk most a folyadékfelszínek így megadott elméleti alakjának a kísérleti adatokkal való megegyezését.

A ξ tengelyen ezt a megegyezést jó pontossággal mindig megtaláltam. Az átlagos eltérés a ξ tengelyen sehol sem haladta meg a $0\cdot2 \frac{\lambda}{2}$ mm-t ($=40 \mu$), átlagban $0\cdot06$ — $0\cdot08 \frac{\lambda}{2}$ mm ($=10$ — 20μ) körül volt, noha az összehasonlított (számított és mért) ordináták nagysága néha 160 — $180 \frac{\lambda}{2}$ mm ($=30$ — 40μ)-ra is emelkedett. Az itt következő 5. sz. táblázatban a 142. sz.

¹ Pl. A. BRAVAIS: Ann. Chim. Phys. (3), t. 5, 1842 p. 492.

² A határszögekre vonatkozólag v. ö. a jelen §. 1. pontjában mondotakkal.

5. sz. táblázat.

ξ	ζ	ξ_{calc}	Δ		ξ	ζ	ξ_{calc}	Δ
mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm		mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm
					+5.376	+50	+50.02	+0.02
					5.090	45	45.10	+0.10
					4.770	40	39.98	-0.02
					4.442	35	35.14	+0.14
					4.074	30	30.12	+0.12
					3.663	25	24.99	-0.01
-2.270	+20	+20.03	+0.03		3.220	20	19.97	-0.03
-2.019	15	15.19	+0.19		2.729	15	15.02	+0.02
-1.687	10	10.06	+0.06		2.159	10	10.04	+0.04
-1.221	5	4.98	-0.02		1.449	5	5.06	+0.06
-1.096	4	4.01	+0.01		1.270	4	4.04	+0.04
-0.935	3	2.89	-0.11		1.068	3	3.02	+0.02
-0.742	2	1.87	-0.13		0.834	2	2.01	+0.01
-0.479	1	0.90	-0.10		0.475	1	0.89	-0.11

fényképfelvétel (3. kép) ξ tengelyéhez tartozó számított és mért ordináták összehasonlítása látható. A számítás a 2. sz. táblázat megfelelő adatainak (28a)-ba való behelyettesítése útján nyert

$$\zeta - 9.787 \xi + 28.41 = 16.70 I_0(0.5512 [\xi - 2.850])$$

formula alapján történt. A számított és mért adatok megegyezése a többi felvételhez viszonyítva közepes.

Vizsgáljuk most az elméleti és kísérleti alak megegyezését a ξ tengelyen kívülfekvő pontokban. A megegyezés itt azon fordul meg, hogy a folyadékfelszín pontos forgásfelület-e, vagy sem. Ha az edény keresztmetszete nem pontos kör, ha a határszög a kerület mentén nem mindenütt ugyanaz (az esetleges elkerülhetetlen szennyeződések miatt), ha az edény fala nem áll pontosan függőlegesen, a felszín már nem lehet pontos forgási felület, tehát a számított és mért adatok között szisztematikus eltérésnek kell mutatkoznia. Ez az eltérés a legtöbb fényképfelvételnél jelentkezett is, több-kevesebb mértékben, és a jelenlegi kísérleti

berendezés mellett a véletlenül mulhatott, hogy egy-két felvételnél nem mutatkozott.

Az összehasonlítást általában kétféleképpen végeztem: Vagy egy, az η tengellyel párhuzamos egyenes mentén mértem meg a különböző csíkok középpontjainak koordinátáit, vagy egy kiválasztott interferencia-csík egyes pontjainak koordinátáit határoztam meg.

A 6. sz. táblázat az első módon készült: a 142. sz. felvétel $\xi = -0.065$ mm egyenese mentén haladva végig; η , ζ jelöli az észlelt koordinátákat, ζ_{calc} az észlelt η -hoz tartozó számított ζ -kat. A számítás a

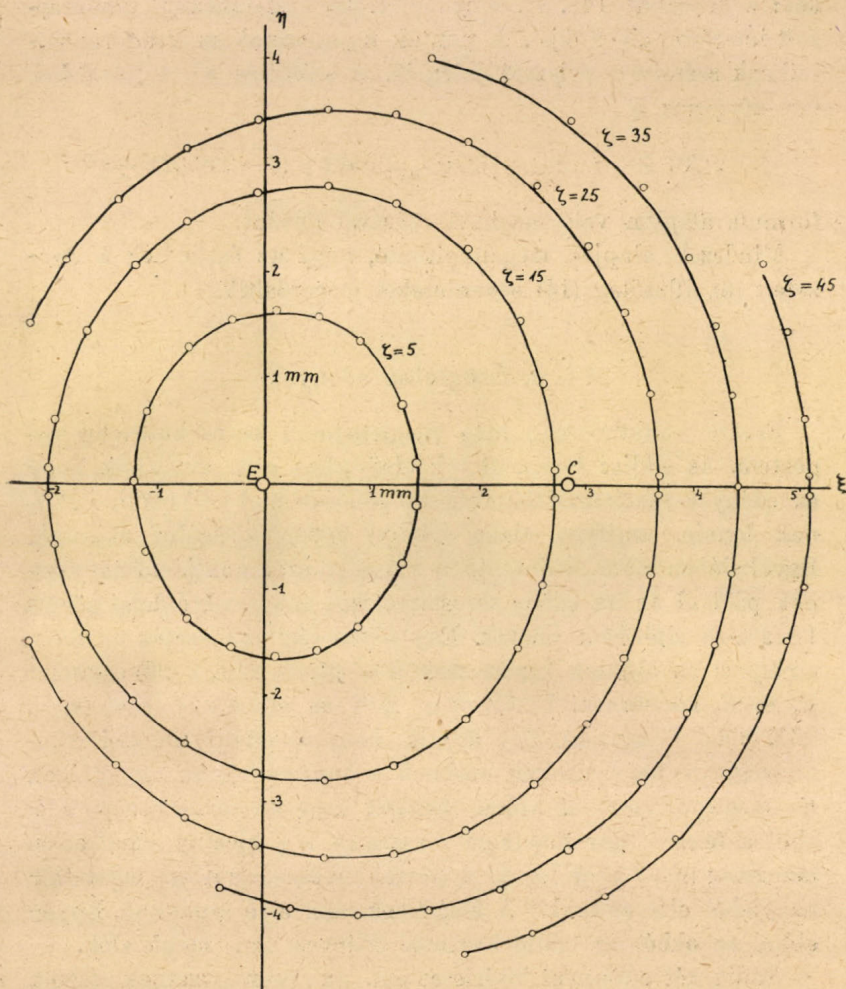
$$\zeta + 9.787 \cdot 0.065 + 28.41 = 16.70 I_0 (0.5512 \sqrt{(0.065 + 2.850)^2 + \eta^2})$$

formula alapján történt. (V. ö. (28).) Az eltérés a többi felvételhez képest jobb az átlagosnál.

6. sz. táblázat.

η	ζ	ζ_{calc}	Δ	η	ζ	ζ_{calc}	Δ
mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm
-4.316	+45	+44.43	-0.57				
-4.127	40	39.56	-0.44				
-3.919	35	34.72	-0.28	+3.923	5	34.82	-0.18
-3.678	30	29.70	-0.30	3.685	30	29.84	-0.16
-3.424	25	25.03	+0.03	3.405	25	24.64	-0.36
-3.108	20	19.97	-0.03	3.092	20	19.70	-0.30
-2.737	15	14.99	-0.01	2.721	15	14.79	-0.21
-2.261	10	9.92	-0.08	2.265	10	9.96	-0.04
-1.60	5	4.92	-0.08	1.607	5	4.96	-0.04
-1.437	4	3.97	-0.03	1.428	4	3.94	-0.06
-1.226	3	2.97	-0.03	1.223	3	2.3	-0.07
-0.962	2	1.92	-0.08	0.976	2	1.97	-0.03
-0.600	1	0.91	-0.09	0.621	1	0.98	-0.02

A másik összehasonlítási módszer eredményeit a 3. ábra szemlélteti. A kihúzott vonalak képviselik az észlelt koordináta-



3. ábra.

E : érintési pont. Igen közel van az origóhoz, de nem esik egybe vele ($\xi = -0.02$ mm).

C : a felszín csúcspontja.

kat: a kivetített 142. sz. fényképfelvétel szabadkézzel utánarajzolt interferencia-csíkjai. A pontok ugyanannak az interferencia-csíknak számított helyzetét jelentik. A számítás adott ξ és η -hez tartozó γ -nak a

$$\xi - 9.787 \eta + 28.41 = 16.70 I_0 (0.5512 \sqrt{(\xi - 2.8502)^2 + \eta^2})$$

formula alapján való meghatározásával történt.

Mindezek alapján megállapítható, hogy az észlelések a levezetett (6), illetőleg (14) egyenleteket megerősítik.

14. §. Szögletes edények.

Ezekre vonatkozólag még meglehetősen kevés kísérletet végeztem. Az eddigi tapasztalatok elsősorban arra mutatnak, hogy az edény keresztmetszetének nagy pontossággal kell olyan alakúnak lennie, amilyen alakú edényt éppen vizsgálni akarunk. Egyáltalában nem tekinthető a vizsgálat szempontjából négyzetnek például az az edény-keresztmetszet, amelynek oldalai között 1—2%-os eltérések vannak. Egy olyan téglalap esetén ugyanis, amelynél az oldalak között csak 3% eltérés van, a (23) egyenlet C_1 és C_2 konstansai között már 20%-os eltérés is lehet (v. ö. 362. oldal ² jegyzet). Úgy látszik, hogy az edény méretei exponenciálisan befolyásolják ezeknek a konstansoknak az értékét. Ez meglepő, mert az volna várható, hogy az edény közepe felé, ahol a felszín már majdnem vízszintes, s a kicsiny emelkedési magasság miatt alig lép ki a normálnívóból, az edény sajátságai nagyjából elmosódnak.¹ A kísérletek nem erre mutatnak. Éppen ebből az okból az eddig használt edények nem megfelelők.

Eddig két edénnyel kísérleteztem. Az első négyzetnek készült, azonban oldalhosszai: 33.3, 32.6, 34.0, 32.6 mm. A másik

¹ Kísérleteim kezdetén még úgy gondoltam, hogy ezzel az érzékeny kísérleti módszerrel tulajdonképpen a folyadékfelszínnek az érintési ponthoz tartozó DUPIN-féle indikátrixához hasonló másodrendű görbéket kell nyerni és csodálkozva tapasztaltam, hogy a nyert görbék távolról sem tekinthetők másodrendűeknek. Ez indított azután ezeknek a görbéknek a pontosabb vizsgálatára s így az elméleti részben elmondottak felismerésére.

egyenlőoldalú háromszögnek, ennek oldalhosszai: 56·7, 55·7, 56·3 mm.

1. Négyyszögű edény.

A 4. képen ebben az edényben előállított felszínről készült fényképfelvétel látható. Rátekintéssel is megállapítható, hogy nem lehet rá a négyzetes edényre levezetett (22) egyenletet alkalmazni. Megkíséréltem tehát az edény keresztmetszetét téglalapnak tekinteni s a (23) egyenletet alkalmazni. Körülbelül 5—8%-os szisztematikus hibával ugyan, de mégis sikerült ilyen módon a kérdéses folyadékfelszínt egy (23) alakú egyenlettel leírni. Ez mindenesetre arra mutat, hogy az edény keresztmetszetének pontosabbá tételével a teljes megegyezés elérhető, vagyis (23) valóban téglalap keresztmetszetű edényben előálló folyadékfelszint jellemző.

A számítás a következő megfontolások alapján történt:

A felvétel igen közel szimmetrikus a 4. ábrán megjelölt ξ tengelyre. A görberendszert — az innen származó nagyfokú egyszerűsödéssre való tekintettel — pontosan szimmetrikusnak tekintettem. A szimmetriából és a görbék alakjának tekintetbevételéből következik, hogy az érintési pont benne van a felszín csúcspontján áthaladó, az edény valamelyik falára merőleges, függőleges síkban. Ha tehát az x tengelyt az edénynek erre a falára merőlegesen irányítjuk, az érintési pont benne van az (x, z) síkban.¹ Ekkor azonban ugyanazt a (ξ, η, ζ) koordinátarendszert vezethetjük be, mint a hengersizimmetrikus felszíneknél (9. §.), s az ott levezetett transzformációs egyenletek (24) is érvényben maradnak. Behelyettesítve ezeket (23)-ba:

$$\zeta - \tau_0 \xi + z_0 = C_1 \cosh A(\xi - x_0) + C_2 \cosh A\eta.$$

Ebből az egyenletből a fényképfelvétel (ξ, ζ) metszetének felhasználásával x_0, τ_0, A, C_1 , az (η, ζ) metszet felhasználásával pedig C_2, z_0 a 9. §-ban adott eljárások segítségével kiszámítható. Eredmények:

¹ Ugyanazt a koordinátarendszert alkalmazzuk, mint (23) levezetésénél. Az x tengely ott is merőleges volt az edény valamelyik falára. Az 1. ábra felfogható téglalap keresztmetszetű edényben előálló folyadékfelszín (x, z) metszeteként is.

238. sz. felvétel; 19.5°C ; 19°C -on telített cukoroldat, 66.9% , $s_{19/4} = 1.329$; az edény méretei a fentebb megadottak

- a) (ξ, ζ) metszetből: $x_0 = 0.32 \pm 0.01 \text{ mm}$; $\tau_0 = 0.32 \pm 0.03 \frac{\lambda}{2}$
 $\text{rad} = 0' 14''$; $a = 2.66 \pm 0.01 \text{ mm}$; $C_1 = 3.02 \pm 0.04 \frac{\lambda}{2} \text{ mm} =$
 $= 0.658 \mu$.
- b) (η, ζ) metszetből: $a = 2.79 \pm 0.01 \text{ mm}$; $^1 C_2 = 2.53 \pm 0.05$
 $\frac{\lambda}{2} \text{ mm} = 0.551 \mu$; $^2 z_0 = 4.9 \pm 0.1 \frac{\lambda}{2} \text{ mm} = 1.06 \mu$.

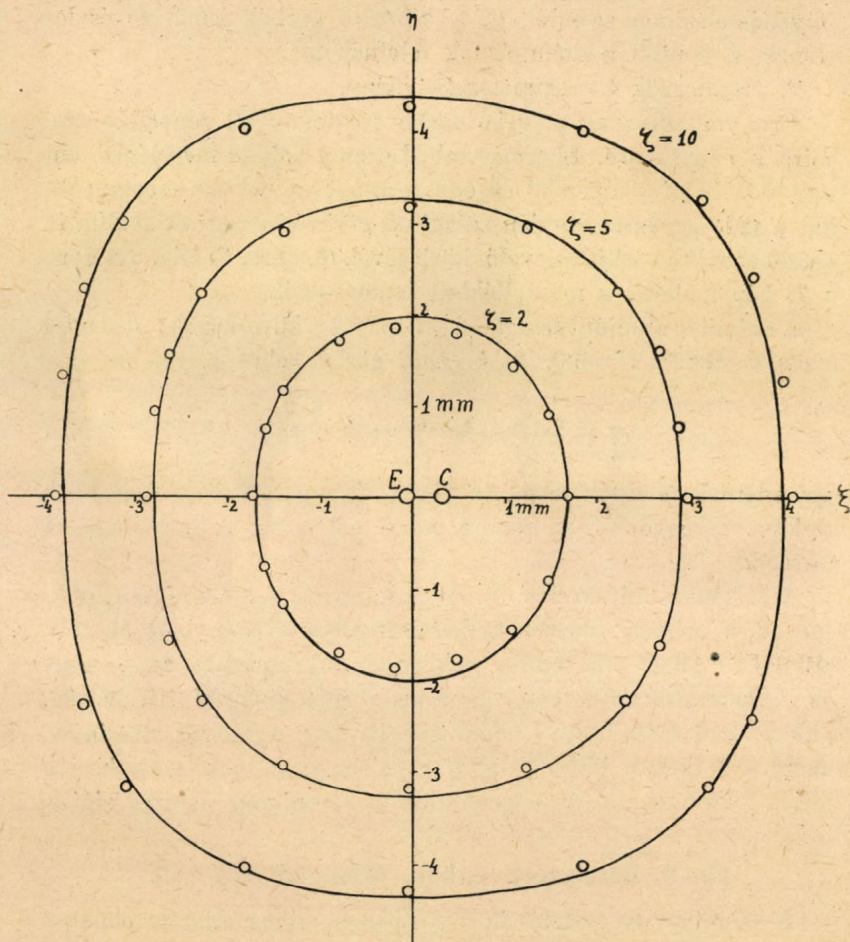
7. sz. táblázat.

ξ	ζ	ζ_{calc}	Δ		ζ	ζ_{calc}	Δ
mm	$\frac{\lambda}{2} \text{ mm}$	$\frac{\lambda}{2} \text{ mm}$	$\frac{\lambda}{2} \text{ mm}$		mm	$\frac{\lambda}{2} \text{ mm}$	$\frac{\lambda}{2} \text{ mm}$
-5.036	+22	+20.53	-1.47		+5.393	+22	+20.77
-4.876	20	18.64	-1.36		5.207	20	18.56
-4.705	18	16.80	-1.20		5.034	18	16.87
-4.517	16	14.96	-1.04		4.819	16	14.98
-4.299	14	13.05	-0.95		4.613	14	13.34
-4.061	12	11.21	-0.79		4.310	12	11.22
-3.793	10	9.41	-0.59		4.023	10	9.49
-3.463	8	7.53	-0.47		3.660	8	7.64
-3.068	6	5.71	-0.29		3.200	6	5.75
-2.516	4	3.78	-0.22		2.581	4	3.83
-2.156	3	2.85	-0.15		2.225	3	2.98
-1.671	2	1.90	-0.10		1.714	2	2.04
-0.894	1	1.01	+0.01		0.894	1	1.09

¹ A két különböző metszetből számított két kapilláris állandó csak akkor egyezhet meg, ha az edény valóban téglalap keresztmetszetű. Az 5%-os differencia teljesen reális. A továbbiakban a két Δ számtani közepével számoltunk tovább.

² Ha az edény keresztmetszetét téglalapnak tekintjük, úgy ennek nem egyenlő oldalai 32.6 és 33.65 mm hosszúak. A differencia tehát kereken a számtani közép 3.5%-a; C_1 és C_2 differenciája pedig számtani közepüknek 18%-a.

Ha mármost az ezen konstansok alapján felírható egyenletnek a fényképfelvétellel, vagyis a tapasztalattal való megegyezését vizsgáljuk, 5—8%-os eltérésektől — amelyek az edény «pontatlansága» és a felvétel szimmetriájánál tett elhanyagolásból könnyen kijöhetnek — eltekintve, a megegyezést mindenütt megtaláljuk.



4. ábra.

E : érintési pont (abszcisszája $\xi = -0.05$ mm)

C : a felszín esúcpontja.

A 7. sz. táblázat a ξ tengelyre vonatkozik. Ugyanúgy készült, mint az 5. sz. táblázat. $\eta=0$ lévén, ζ_{calc} számításához a

$$\zeta = 0.315 \xi + 4.87 = 3.017 \cosh 0.5197 (\xi - 0.317) + 2.526$$

formula szolgáltat alapul.

A 4. ábra a megegyezést a fényképfelvételen szereplő teljes folyadékfelszínen szemlélteti. A kihúzott görbék ismét az észlelésnek, a pontok a számításnak felelnek meg.

2. Háromszög keresztmetszetű edény.

Erre vonatkozólag még kevesebb eredmény áll rendelkezésre, mint a négyszögre. Legyen szabad ezen a helyen megelégednem egy észlelt (fényképezett) és egy önkényesen felvett konstansokkal a (21) egyenlet alapján számított görberendszernek kvalitatív összehasonlítás céljából való közlésével. (5. ábra, 7. kép. Az ábra a 7. kép mellett, a műmellékleti lapon található.)

A számítás alapjául szolgáló konstansok a következők: $A=0.50$ (azaz $a=2.82$), $H=6.0$. Az 5. ábra görbéi tehát a

$$z = 2e^{\frac{1}{2}x} + 4e^{-\frac{1}{2}x} \cosh \frac{\sqrt{3}}{4} y$$

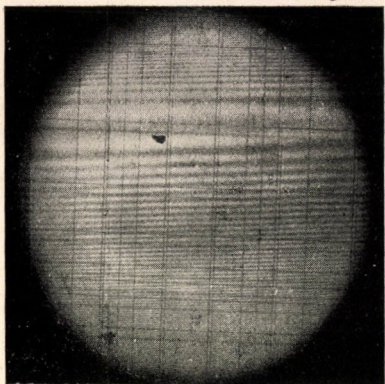
egyenletnek felelnek meg. Az ábrán feltüntetett 2-ik, 8-ik 14-ik csikhoz az egyenletben rendre $z=6+2$, $z=6+8$, $z=6+14$ tartozik.

A 7. képen látható 236. sz. fényképfelvétel a fentebb (361. old.) megadott méretű, háromszög-keresztmetszetű edényben készült. (19.8°C ; 19°C -on telített cukoroldat.) Tekintettel arra, hogy ez a keresztmetszet nem pontosan egyenlőoldalú háromszög, ehhez járul még, hogy a referencia-sík nem pontosan vízszintes, azért a 7. képen látható interferencia-görbék nem mutathatják teljes pontossággal az egyenlőoldalú háromszög szimmetriáját.

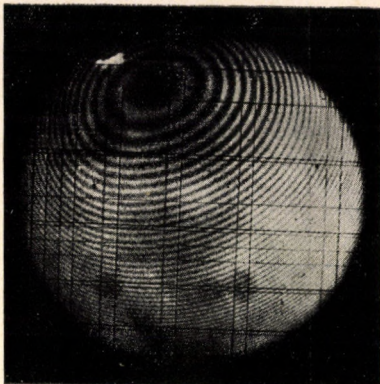
15. §. Rendszeres hibák. Ellenőrző mérések.

A számítás és észlelés között szisztematikus eltérést okozhat minden olyan körülmény, amely az elmélet feltevéseivel ellentézik. Ilyen például, mint azt már említettük, a folyadékfelszín szabálytalansága. Említettük már e szabálytalanságok előidézőit is. Ezek precízebb edények használata útján és tökéletesebb kísér-

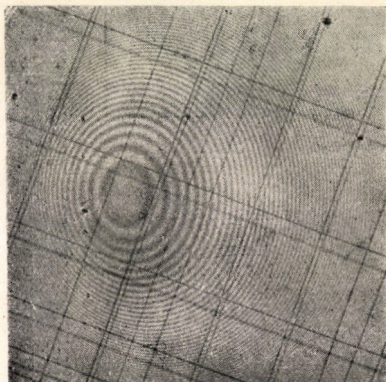
Ily. Somogyi Antal:
Kicsiny görbületű folyadékfelszínek alakjának vizsgálata.



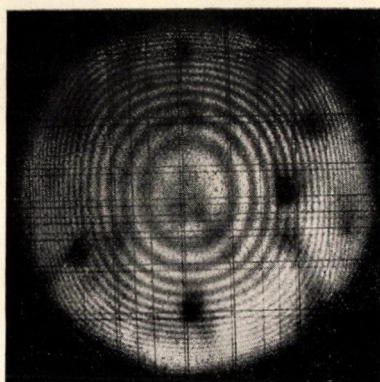
1. kép.



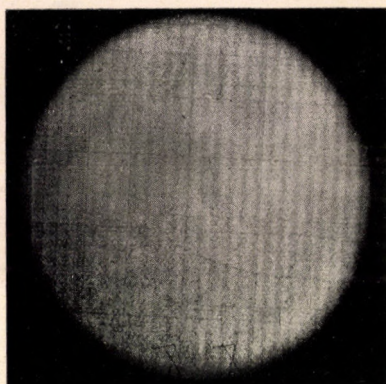
2. kép.



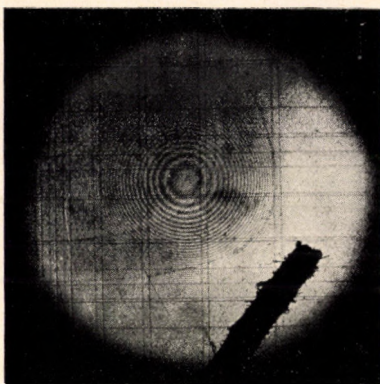
3. kép.



4. kép.

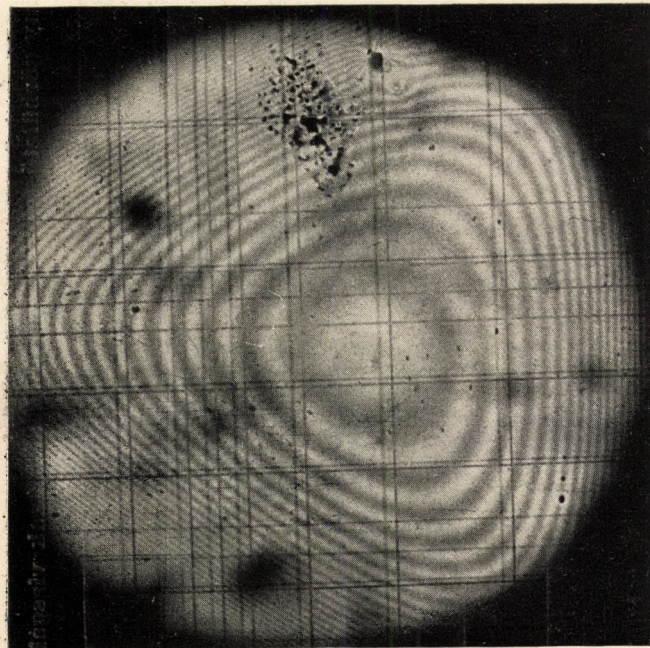


5. kép.

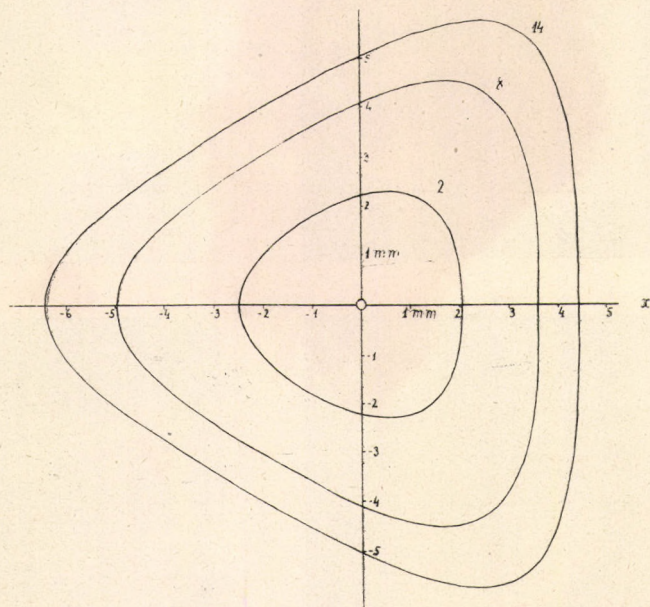


6. kép.

Hj. Somogyi Antal:
Kicsiny görbületű folyadékfelszínek alakjának vizsgálata.



7. kép.



5. ábra.

leti berendezéssel úgyszólván teljesen kiküszöbölhetők. Ugyancsak szisztematikus eltérést okozhatna, ha a felület normálisának a függőlegessel alkotott szögénél a sinus, illetőleg a tangens függvény nem volna elegendő pontossággal az arcussal helyettesíthető. Az eddigi fényképfelvételeknél a kérdéses szög 1° -nál mindig kisebb volt, így a felcserélés egy fél ezrelék pontossággal történhetett, s a cosinus függvény helyébe egy tízezredrésnyi pontossáig írhattuk az egységet. Észrevehető szisztematikus hiba tehát ebből nem állhatott elő.

Egészen más természetű rendszeres hiba forrása lehet a kísérleti berendezés sík tükreinek esetleges görbültsége. Még ha a számított és észlelt értékek között nem, vagy csak alig észrevehetően okoz eltérést ez a hiba, akkor is erősen meghamisíthatja a számított konstansok értékét, mert a felszín alakját ezzel nem egy síkhoz, hanem egy görbe felülethez képest állapítjuk meg. A tükröző felületek aránylag kicsiny görbültsége is számottevő lehet, mert a vizsgált folyadékfelszín görbülete is igen kicsiny.

Ma már azonban előállítanak olyan plan üvegfelületeket, amelyek átlagos görbületi sugara 50—100 km, ilyen üveglemez beszerzése, sőt kiméretése is csak pénz és idő kérdése. Ezek az üveglapok természetesen aggály nélkül használhatók 10—20 m görbületi sugarú felszínek tanulmányozására. Ilyen üveglemez azonban nem állott rendelkezésemre. Az alábbi megfontolások a jelenlegi berendezés optikai részére vonatkoznak.

Az üveglapok görbültségéből eredő hibára, mint már említettük, a kísérleti adatokból nem lehet következtetni, erre a célra tehát külön méréseket kell végezni. Ugyanolyan módon, mint ahogy a folyadékfelszínek alakját határoztam meg, ismert felületeket vizsgáltam, éspedig először sík, majd gömbfelületeket.

1. Az optikai berendezés vizsgálata egy ZEISS-féle normálüveglap segítségével.

A vizsgálat célja a referencia-sík átlagos görbületének meghatározása volt. A készülékbe a folyadékfelszín helyére egy $0.1\ \mu$ -ra pontosan sík ZEISS-féle normál üveglapot helyeztem s az előálló interferencia-rendszert lefényképeztem (5. kép). Az interferencia-csíkok koordinátáit, rájuk merőleges metszetben,

több helyen is kimértem s ezekből az adatokból — a referencia-síkot első közelítésben gömbfelületnek tekintve — kíséreltem meg a kérdéses görbületi sugarat meghatározni. Az eredmények azonban azt mutatták, hogy ez a sugár oly nagy, hogy az egyenlő vastagság görbéivel alig, a jelenlegi kísérleti berendezés mellett pedig egyáltalában nem mérhető. (A kiegyenlítés vég-eredményéül 6.8 ± 20 km adódott.)

A vizsgálat mindenesetre azzal a pozitív eredménnyel zárult, hogy a referencia-sík görbületi sugara igen nagy, abszolút síkkal kombinálva a jelenlegi feldolgozási eljárás szempontjából ekvidisztans, egyenes interferencia-csíkakat ad. 1—10 m görbületi sugarú folyadékfelszínnel kombinálva tehát a referencia-síkot, a keletkező interferencia-csíkok valóban a folyadékfelszín alakját fogják jellemezni, a referencia-sík görbülségének hatása csekély lesz. Hogy legalább hozzávetőleges képet nyerjek arról a hibáról, amit a referencia-sík görbülsége a számított konstansokban okoz, a következőképpen jártam el:

A referencia-sík görbületi sugarának azt az értéket vettem, amely a gyártó cég garanciája alapján adódik, ha a referencia-síkot gömbfelületnek tekintjük. Tekintettel arra, hogy egy felületen a megengedett legnagyobb eltérés az abszolút síktól 0.2μ , az üvegfelületek átmérője 50 mm és a referencia-sík kialakításában háromszor szerepel visszaverődés ilyen üvegfelületen, azért a görbületi sugár körülbelül 260 m-re tehető. Numerikus példán megvizsgáltam, hogy a referencia-síknak ekkora görbülsége mennyire befolyásolja a és H értékét. Az eredmények azt mutatták, hogy 1 m-nél kisebb csúcsponti görbületi sugarú folyadékfelszíneknél a hiba nem vehető észre, 8—10 m csúcsponti görbületi sugár mellett a -ban a hiba 1%, H -ban 5% körül jár. Bizonyos azonban, hogy berendezésemben a referencia-sík görbületi sugara 260 m-nél nagyobb volt: ekkora görbületi sugár ugyanis a normálüveglappal kombinálva már érezhetően görbült és nem ekvidisztans interferencia-csíkakat adna; a 122. sz. felvételen (5. kép, nagyítás kb. 4-szeres) a csíkok egyik végének a másik végükben húzott érintőtől már 2 mm-re el kellene hajolniok. A számított konstansokban a referencia-sík görbülségéből eredő hiba tehát a fentebb megadottaknál is kisebb.

2. Az optikai berendezés vizsgálata gömbfelület segítségével.

A vizsgálat célja annak megállapítása volt, hogy a referencia-sík görbültsége hogyan befolyásolja a vizsgált felület görbületi sugarára adódó értéket: Hogyan torzítja el egy görbe felület alakját. A folyadékfelszín helyére ezért nagy görbületi sugarú lencsefelületet helyeztem, az interferencia-rendszert lefényképeztem. Két különböző lencsével dolgoztam. Szferométerrel¹ történt mérés alapján az első lencse görbületi sugara $R = 127 \pm 4$ cm (237. sz. felvétel), a másiké $R = 106 \pm 3$ cm (241. sz. felvétel, 6. kép)-nek adódott.

Ezeket a görbületi sugarakat a fényképfelvételek alapján is meghatároztam, és pedig mindegyik felvételen két, egymásra merőleges metszetből. Eredmények:

237. sz. felvétel	$R = 128.1 \pm 0.8$ cm	középérték 129 ± 1 cm
	$R = 129.3 \pm 1.0$ cm	
241. sz. felvétel	$R = 105.5 \pm 1.0$ cm	középérték 106 ± 1 cm
	$R = 106.6 \pm 0.6$ cm	

A referencia-sík görbültsége tehát nem befolyásolja érezhetően a vizsgálandó felület észlelt görbületét. Mivel pedig a folyadékfelszín felületi feszültsége szoros kapcsolatban van a felszín görbültségével, azért hasonló állítást tehetünk a számított felületi feszültségre (kapilláris állandóra) is.

Ezzel egyúttal tagadó választ adhatunk arra a feltevésre, hogy a mért kapilláris állandóknak az irodalmi értékektől való eltérését a módszernek, vagy a kísérleti berendezésnek valamilyen belső hibája okozná. Ennek ugyanis jelentkeznie kellene az üveglencse görbületi sugarának mérésében is. Ilyen eltérést azonban a fenti mérési eredmények nem mutatnak. A kapilláris állandó csökkenése tehát innen nem származhat.²

¹ Süss gyártmányú, érzékeny mutatóval kombinált műszert használtam, melynél egy beosztás 2.5μ -t jelentett s a beosztás huszadrésze még becsülhető volt. A menetmagasságot Zeiss-féle normállapokkal határoztam meg.

² A kapilláris állandó csökkenésére a magyarázatot a 11. §-ban már megadtuk.

Összefoglalás.

Kicsiny görbületű folyadékfelszínek közel vízszintes részeivel foglalkoztunk. Az elméleti részben a kapilláris differenciálegyenlet egyszerűsödését s ennek az egyszerűsített differenciálegyenletnek partikuláris megoldásait vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy henger-szimmetrikus felszínek közel vízszintes részeit imaginárius argumentumú trigonometrikus, a forgásfelület alakú felszínek közel vízszintes részeit pedig imaginárius argumentumú BESSEL függvények írják le. Megadtuk — ha egyelőre bizonyítás nélkül is — konvex sokszög keresztmetszetű edényben előálló felszín közel vízszintes részének egyenletét is. A kísérleti részben kicsiny görbületű felszínek alakjának meghatározására alkalmas módszert ismertettünk. A kísérletileg felvett alaknak az elméletileg levezetett egyenlettel való egybevetése útján egyrészt az egyenleteknek a tapasztalattal való megegyezését konstatáltuk, másrészt az egy határszöget leszámítva, a folyadékfelszín összes állandóit meghatároztuk. Így sor került mikronnál is kisebb emelkedési magasságoknak aránylag nagy pontossággal (1—2%) való mérésére is, ami tudomásom szerint eddig még nem történt.

*

Méréseimet a Pázmány Péter Tudományegyetem I. számú Fizikai Intézetében, az 1940—42. években végeztem. Mély hálával mondok köszönetet RYBÁR ISTVÁN professzor úrnak, az intézet igazgatójának, hogy számomra a kísérletek elvégzését lehetővé tette. Hálás köszönettel tartozom ORTVAY RUDOLF professzor úrnak is azért a megtisztelő érdeklődésért, amellyel a dolgozat elméleti részének fejlődését kísérte. BARNÓTHY JENŐ magántanár úrnak és FORRÓ MAGDOLNA adjunktus úrnőnek sok gyakorlati jó tanácsért mondok ezúton is köszönetet, valamint azért a fáradhatatlan szívésségért, amivel problémák megvitatásában, vagy a megfelelő eszközök előkeresésében egyaránt állandóan segítségemre voltak. Köszönettel emlékezem meg vitéz SZÉP JENŐ tanársegéd úrról, aki a mérések végrehajtásában a kezdet nehézségeinél több mint egy fél éven át segédkezett.

ifjabb Somogyi Antal.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE GESTALT WENIG GEKRÜMMTER FLÜSSIGKEITS-OBERFLÄCHEN.

Es wird darauf hingewiesen, dass man die Kapillaritäts-differentialgleichung an den beinahe horizontalen Teilen der Flüssigkeits-oberflächen in die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{a^2} z$$

schreiben kann. Es werden Lösungen dieser Differentialgleichung gesucht, die gewissen gegebenen Randbedingungen entsprechen. Die Lösung wird bei zylindersymmetrischen Flüssigkeits-oberflächen durch exponentiale, bzw. durch hyperbolische Funktionen, bei rotations-symmetrischen Oberflächen durch die BESSEL'schen Funktionen *O*-ter Ordnung, erster und zweiter Gattung hergestellt. Es werden ferner gewisse Lösungen hergestellt, die die beinahe horizontalen Teile der Flüssigkeits-oberflächen, die in Gefässen von konvexem vieleckigem Querschnitte auftreten, zu beschreiben scheinen. Experimente, die bei Gefässen mit rechteckigem, bzw. regelmässig-dreieckigem Querschnitt ausgeführt wurden, haben die entsprechenden Formeln genügend bestätigt.

Im experimentellen Teil wird eine Methode angegeben, die geeignet ist, die Gestalt wenig gekrümmter Oberflächen zu bestimmen. Das Wesen der Methode besteht in der Anwendung der Interferenzstreifen von gleicher Dicke, welche zwischen der zu untersuchenden Flüssigkeits-oberfläche und einer genügend ebenen Glasfläche hergestellt werden. Mittels der Vergleichung der experimentell bestimmten Oberflächengestalt mit der theoretisch abgeleiteten Gleichung wird einerseits die Übereinstimmung der letzteren mit der Erfahrung festgestellt, anderseits werden alle Konstanten der Flüssigkeits-oberfläche, mit Ausnahme des Randwinkels, ermittelt.

A. Somogyi jun.

KITÜZÖTT FELADATOK.

(A megoldásokat — mindeniket külön lapra írva — a következő címre kérjük: EGERVÁRY JENŐ, Budapest, IV., Kecskeméti-u. 4.)

20. Adott konvex négyszögbe végtelen sok négyszög írható úgy, hogy ennek oldalai az eredeti négyszögből négy egyenlő területű háromszöget metszenek le. Meghatározandó ezek közül a minimális területű és bebizonyítandó, hogy ennek szemközti oldalai az eredeti négyszög átlóin metszik egymást.¹

(Zigány Ferenc)

21. Bebizonyítandó, hogy ha a sík egybevágó konvex ötszögekkel — azok egyenlő oldalainak összeillesztése révén — egyszerűen és hézagtalanul beborítható, akkor az ötszögnek van két egyenlő oldala.

(Kárteszi Ferenc)

22. FOURIER-féle sorba fejtendő

$$\frac{\cos n\theta - \cos nt}{\cos \theta - \cos t}$$

mint t függvénye, ha n természetes szám.

(Egerváry Jenő)

¹ V. ö. FEJES LÁSZLÓ 14. feladatával (l. lentebb a 374. lapon).

MEGOLDOTT FELADATOK.

A 10. feladat első részének második megoldása.¹

A bebizonyítandó egyenlőség:

$$a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi x^2}}{1+x^2} dx = 2\pi e^{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

Legyen

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi a(x^2+1)}}{1+x^2} dx,$$

tehát

$$F'(a) = -\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a(x^2+1)} dx = -\pi e^{-\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{-\pi e^{-\pi a}}{\sqrt{a}}.$$

(Szabad t. i., minthogy a fellépő integrálok $a \geq \varepsilon > 0$ -ra egyenletesen összetartók, az integráljel alatt differenciálni.) Innen integrálással:

$$F(a) = -\pi \int_{+\infty}^a \frac{e^{-\pi a}}{\sqrt{a}} da + F(\infty) = 2\pi \int_{\sqrt{a}}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx,$$

minthogy $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 0$. Tehát

$$F(1) = 2\pi \int_1^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

Innen e^{π} -vel szorozva adódik az a) egyenlőség.

(Sándor Gyula)

*

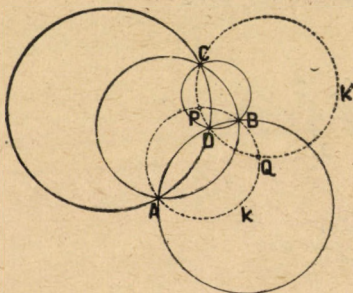
13. A, B, C, D a sík adott egymástól különböző pontjai. Megszerkesztendő az a pontpár, amelyik az A, B pontpárral is és a C, D pontpárral is harmonikus csoportot alkot.

(Hajós György)

¹ L. e kötet 177. l.

A 13. feladat első megoldása.

Ha A, B, C, D a sík négy tetszőleges, egymástól különböző pontja, akkor van egy és csak egy olyan P, Q pontpár, amelyre $ABPQ$ és $CDPQ$ harmonikus pontnégyes. Van ugyanis egy és csak egy olyan J homográfia (azaz komplex változós lineáris transzformáció), amely az A, B, C pontokat a B, A, D pontokba viszi át, s ennek van leg-



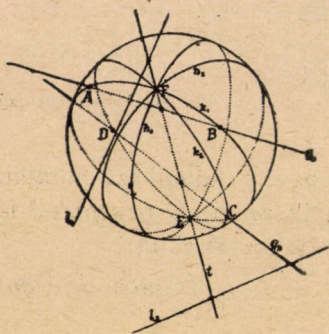
alább egy P fixpontja. J^2 -nek fixpontjai ezen kívül A és B , tehát J^2 az azonosság, és J involutorius. A J involúciónak két fixpontja van, P és Q , s mivel J feleltet A -t B -re, valamint C -t D -re, azért $ABPQ$ és $CDPQ$ harmonikus négyesek.

Ha az A, B, C, D pontok egy körön fekszenek, akkor a P, Q pontok ismert, elemi módon megszerkeszthetők. (Köröknek nevezzük a

köröket és egyeneseket.) Ha az A, B, C, D pontok nem fekszenek egy körön, akkor az ABC és ABD körök, valamint az ACD és BCD körök a J involúciónál egymásba mennek át. Az ABC és ABD köröknek az a k szimmetriaköre (szögfelező köre), amely elválasztja C -t és D -t, s az ACD és BCD köröknek az a k' szimmetriaköre, amely elválasztja A -t és B -t, a J involúciónál megfordított irányban önmagába megy át. Mivel mindegyiken van J -nek fixpontja, azért a k és k' kör két metszéspontja a P és Q pont.

(Kerékjártó Béla)

A 13. feladat második megoldása.



Az A, B és E, F pontpár akkor alkot harmonikus csoportot, ha E és F egyrészt egy körön fekszik az A, B alappontú (azaz A és B ponton áthaladó) K körsornak, másrészt egy körön fekszik az A, B pontkörű (az előbbieket merőlegesen metsző körökből álló) H körsornak is.

Projiciáljuk síkunkat és A, B, C, D pontjainkat sztereografikusan egy gömbre. Jelöljük pontjaink képeit megint csak A, B, C, D betűkkel. Az $AB = g_1$ és

$CD=g_2$ egyeneseken átmenő síksorok metszik ki a gömbből e pontpárok K körsorait. E pontpárok H körsorait pedig g_1 és g_2 poláregyenesén, az l_1 -én és l_2 -n átmenő síksorok metszik ki a gömbből.

E négy egyenesnek két transzverzálisja van. Ha e transzverzálisok egyikének, t -nek metszéspontjai a valós E, F pontok, akkor a $[g_1t]$, $[g_2t]$, ill. $[l_1t]$, $[l_2t]$ síkok metszetei K , ill. H fajtájú körök és igazolják, hogy az $ABEF$ és $CDEF$ pontnégyes harmonikus. Az említett transzverzálisok meghatározása az ábrázoló geometria ismert szerkesztései közé tartozik.

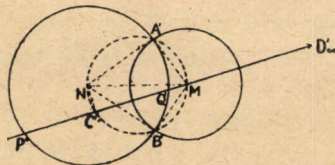
Csak egy megoldás van, mert a két transzverzálisnak csak egyike metszheti a gömböt valós pontokban. Ugyanis a két transzverzális egymásnak poláregyenes. Hiszen t metszi g_1 -et s így t poláregyenesé metszi g_1 poláregyenesét, az l_1 -et. Hasonlóan látható be, hogy t poláregyenesé metszi a g_1, g_2, l_2 egyeneseket is. Ezért valóban t poláregyenesé a másik transzverzális.

(Zigány Ferenc)

A 13. feladat harmadik megoldása.

Legyen P és Q a két keresett pont. Tekintsük először az általános esetet, azaz amikor a négy adott pont nincs egy egyenesen vagy egy körön. Ekkor az $ABPQ$ és $CDPQ$ pontnégyes egy-egy körön van (amelyek közül az egyik egyenessé is fajulhat), mert — mint ismeretes — négy pont kettőviszonya csak akkor lehet valós, ha a négy pont egy körön (vagy egyenesen) van.

Ha egy inverziót alkalmazunk (amely, mint tudjuk, nem változtatja meg négy pont kettőviszonyát), az egyik pontot, például D -t választva az inverzió középpontjának, akkor a $CPDQ$ kör (vagy egyenes) egy $P'C'Q'$ egyenesbe megy át, és, mivel D inverze a végtelenben van, azért harmonikus társa C' felezi a $P'Q'$ szakaszt; az $APBQ$ kör egy $A'P'B'Q'$ körbe megy át. Egy ismert



tétel szerint: ha $A'B'P'Q'$ harmonikus pontnégyes, akkor az $A' B'$ pontpáron átmenő kör, amelynek M középpontja a $P'Q'$ egyenesen van, derékszögben metszi az $(N$ középpontú) $A'P'B'Q'$ kört; azaz $NA'M \hat{=}$ és $NB'M \hat{=}$ derékszög. Azonban $NC'M \hat{=}$ is derékszög (mert C' a $P'Q'$ húr felezőpontja). Tehát A', B', C' az MN átmérőjű körön van.

Ezzel indokoltuk a következő szerkesztést: az $A'B'C'$ kört metsszük az $A'B'$ szakasz felezőmerőlegesével; azt a metszéspontot, amelyiket

A' és B' elválaszt C' től, M -mel s a másikat N -nel jelöljük; az N körül írt, A' és B' ponton áthaladó kör a $C'M$ egyenesből kimetszi a P' és Q' pontot, ezeknek inverze pedig a keresett P és Q .

Ha a négy adott pont egy körön vagy egy egyenesen van, akkor az inverzió után C' az $A'B'$ egyenesen lesz.

Ha C' az $A'B'$ szakaszon van, vagyis, ha az adott két pontpár elválasztja egymást, akkor N az $A'B'$ szakasz felezőpontjába kerül, M pedig az $A'B'$ felezőmerőlegesén a végtelenbe, a P' és Q' pontot úgy kapjuk, hogy az $A'B'$ átmérőjű kört metsszük az $A'B'$ szakaszra a C' pontban emelt merőlegessel.

Ha C' az $A'B'$ szakaszon kívül van, vagyis, ha az adott pontpárok nem választják el egymást, akkor N kerül ($A'B'$ felezőmerőlegesén) a végtelenbe, tehát P' és Q' az $A'B'C'$ egyenesen lesz. Ebben az esetben a leírt szerkesztés nem vezet eredményre. A P' és Q' pontot például úgy kaphatjuk meg, hogy az $A'B'$ egyenest metsszük a C' középpontú és az A' , B' pontokon átmenő bármely kört derékszögben metsző körrel.

Amint látható, a feladatnak mindig egy megoldása van.

(Fila Jenő)

A 13. feladat megoldását beküldötte még: BEKE MANÓ, FÁRY ISTVÁN, GÁL ISTVÁN, ifj. SÁRKADI KÁROLY és (második megoldást is) ZIGÁNY FERENC.

*

14. Írjunk egy egységnyi területű konvex négyszögbe egy négyszöget úgy, hogy ennek oldalai az eredeti négyszögből négy egyenlő területű háromszöget messenek le. Bebonyítandó, hogy a beírt négyszög területe $\geq \frac{1}{2}$.

(Fejes László)

A 14. feladat megoldása.

Legyen az egységterületű négyszög $P_1P_2P_3P_4$, a beírt négyszög pedig $Q_1Q_2Q_3Q_4$, úgy, hogy Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 rendre a $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ oldalon fekszik. Jelöljük a $P_1P_2P_3, P_2P_3P_4, P_3P_4P_1, P_4P_1P_2$ háromszögek területét rendre T_2, T_3, T_4, T_1 -gyel, a négy lemetezett háromszög közös területét pedig τ -val, s legyen

$$\frac{P_1Q_1}{P_1P_2} = \lambda_1, \quad \frac{P_2Q_2}{P_2P_3} = \lambda_2, \quad \frac{P_3Q_3}{P_3P_4} = \lambda_3, \quad \frac{P_4Q_4}{P_4P_1} = \lambda_4.$$

A $Q_1P_2Q_2$ és $P_1P_2P_3$ háromszögek területének viszonya látnivalóan

$$\frac{\tau}{T_2} = \frac{Q_1P_2 \cdot Q_2P_2}{P_1P_2 \cdot P_3P_2} = (1-\lambda_1) \lambda_2.$$

Tehát

$$\tau = T_2(1-\lambda_1) \lambda_2$$

és hasonlóan

$$\tau = T_3(1-\lambda_2) \lambda_3, \quad \tau = T_4(1-\lambda_3) \lambda_4, \quad \tau = T_1(1-\lambda_4) \lambda_1.$$

E négy egyenlőséget összeszorozva:

$$\tau^4 = T_1 T_2 T_3 T_4 \prod_{v=1}^4 \lambda_v (1-\lambda_v).$$

Itt $0 < \lambda_v < 1$ folytán $\lambda_v(1-\lambda_v) \leq \frac{1}{4}$ és így innen

$$\tau \leq \frac{1}{4} \sqrt[4]{T_1 T_2 T_3 T_4} = \frac{1}{4} \sqrt{\sqrt{T_1 T_3} \cdot \sqrt{T_2 T_4}} \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{T_1 + T_3}{2} \cdot \frac{T_2 + T_4}{2}}.$$

Mivel $T_1 + T_3 = T_2 + T_4 = 1$ (itt használjuk fel a konvexitást), az utolsó négyzetgyök értéke $\frac{1}{2}$, úgyhogy $\tau \leq \frac{1}{8}$. A $Q_1Q_2Q_3Q_4$ négyszög területe tehát $1 - 4\tau \geq \frac{1}{2}$.

(Turán Pál)

A 14. feladat megoldását még beküldötte: SÁNDOR GYULA, ifj. SÁRKADI KÁROLY, ifj. SOMOGYI ANTAL, ZIGÁNY FERENC.

★

15. Jelentse $J_m^{(k)}$ az 1, 2, ..., n elemek azon permutációinak a számát, melyekben az inverziók száma $\equiv k \pmod{m}$. Bebizonyítandó, hogy

$$J_m^{(0)} = J_m^{(1)} = J_m^{(2)} = \dots = J_m^{(m-1)} = \frac{n!}{m}. \quad (m=2, 3, \dots, n)$$

(Krausz József)

A 15. feladat első megoldása.

A tétel helyessége közvetlenül belátható, ha $n=2$, ezért n -re vonatkozó teljes indukcióval végezhetjük a bizonyítást. Feltételezzük tehát, hogy az 1, 2, ..., $n-1$ elemek permutációira nézve már igazoltuk a tételt, s írjuk e permutációkban az « n » elemet a q -adik helyre ($1 \leq q \leq n$). Ekkor az inverziók száma valamennyi permutációban $n-q$ -val növekszik, úgyhogy az 1, 2, ..., n elemek így nyert permutációi

közt az indukciós feltevés alapján $\frac{(n-1)!}{m}$ számú van, amelyben az inverziók száma rendre $\equiv n-q, n-q+1, \dots, n-q+m-1 \pmod{m}$. Mivel ez az m szám teljes maradékrendszer alkot \pmod{m} , e megállapításból a $q=1, 2, \dots, n$ esetek figyelembevételével az igazolandó tétel nyilvánvalóan következik az $m < n$ esetekre.

A tételnek az $m=n$ esetben való igazolása céljából tekintsük az $1, 2, \dots, n-1$ elemek egyik permutációját, s iktassuk be e permutációba az n elemet minden lehetséges módon. Az $1, 2, \dots, n$ elemek így nyert n számú permutációjában az inverziók számát n egymás után következő egész szám adja meg, úgyhogy e permutációk közt pontosan egy van, amelyben az inverziók száma $\equiv k \pmod{n}$. Ennél fogva $J_n^{(k)} = (n-1)!$, mert az $1, 2, \dots, n-1$ elemek kiszemelt permutációját $(n-1)!$ -féleképpen választhatjuk.

(ifj. Sarkadi Károly)

A 15. feladat második megoldása.

Az $m=n$ esetet lásd az előbbi megoldásban. Az $m \leq n-1$ eseteket erre az esetre vezetjük vissza. E célból sorozzuk az $1, 2, \dots, n$ elemek valamennyi permutációját $\left(\frac{n!}{m!}\right)$ számú osztályba úgy, hogy az ugyanazon osztályba kerülő permutációk az első $n-m$ elemekben megegyezzenek egymással. Ugyanabban az osztályban a permutációk csak az utolsó m helyen álló elemek sorrendjében különböznek egymástól, s ennek az m elemnek permutációi az $m=n$ esetben már igazolt tétel szerint egyenlő számosságú halmazokra oszlanak az inverziók \pmod{m} vett száma tekintetében. De nyilván ugyanez a megállapítás érvényes egy osztály permutációira (s így az $1, 2, \dots, n$ elemek valamennyi permutációjára) is, hiszen ugyanabban az osztályban valamely permutáció inverzióinak száma mindig ugyanazzal a (nem negatív) számmal nagyobb az illető permutációban az utolsó m helyen álló elemek közti inverziók számánál.

(Szele Tibor)

A 15. feladat harmadik megoldása.

Jelöljük $S_n^{(v)}$ -vel az $1, 2, \dots, n$ elemekből képezhető olyan permutációk számát, amelyekben v inverzió van, s tekintsük az

$$f_n(x) = \sum_{v=0}^{\binom{n}{2}} S_n^{(v)} x^v$$

polinomot. Mivel az $S_n^{(v)}$ számok közt fennáll a következő ismert összefüggés: ¹

$$S_{n+1}^{(v)} = S_n^{(v)} + S_n^{(v-1)} + \dots + S_n^{(v-n)},$$

(ahol $S_n^{(j)} = 0$, ha $j < 0$, vagy $j > \binom{n}{2}$)

azért

$$f_{n+1}(x) = \sum_{v=0}^{\binom{n+1}{2}} (S_n^{(v)} + S_n^{(v-1)} + \dots + S_n^{(v-n)}) x^v = (1+x+\dots+x^n) f_n(x).$$

Ennek az azonosságnak ismételt alkalmazásával a polinom

$$f_n(x) = (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n-1})$$

alakját nyerjük. ² Ennélfogva, ha $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m = 1$ az m -edik egység-gyökök: $f_n(\epsilon_1) = f_n(\epsilon_2) = \dots = f_n(\epsilon_{m-1}) = 0$, $f_n(\epsilon_m) = n!$, tehát

$$\sum_{i=1}^m \epsilon_i^{-k} f_n(\epsilon_i) = n! \quad (0 \leq k \leq m-1) \quad (1)$$

Másfelől az egységgyökök ismert tulajdonsága szerint:

$$\sum_{i=1}^m \epsilon_i^l = \begin{cases} 0, & \text{ha } l \not\equiv 0 \pmod{m}, \\ m, & \text{ha } l \equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

ígyhogy

$$\sum_{i=1}^m \epsilon_i^{-k} f_n(\epsilon_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{v=0}^{\binom{n}{2}} S_n^{(v)} \epsilon_i^{v-k} = \sum_{v=0}^{\binom{n}{2}} S_n^{(v)} \sum_{i=1}^m \epsilon_i^{v-k} = m \sum_{v=0}^{\binom{n}{2}} S_n^{(v)} = m J_m^{(k)},$$

ahol az utolsó \sum mindazon v -kre terjesztendő ki, amelyekre $v \equiv k \pmod{m}$. Ezt az eredményt (1)-gyel egybevetve:

$$m J_m^{(k)} = n!$$

(Turán Pál)

A 15. feladat megoldását beküldötte még: GÁL ISTVÁN, PATÁKY LAJOS, SÁNDOR GYULA, TAKÁCS LAJOS és (második megoldást is) TURÁN PÁL.

*

16. Egy körbe beírunk két oly önmagát nem metsző zárt sokszöget, melyek a kör középpontját belsejükben tartalmazzák. Feltéve, hogy az első sokszög minden oldala kisebb a második sokszög minden oldalánál, bebizonyítandó, hogy az első sokszög kerülete nagyobb a második sokszög kerületénél. ³

(Egerváry Jenő)

¹ Lásd például NETTO: Lehrbuch der Combinatorik (1927.) 95. l.

² Amint utólag értesülök, ez az eredmény bennfoglaltatik VÖRÖS DEZSŐ egy dolgozatában. (Mat. és Fiz. Lapok, 15. k., 1906, 292—299. l.)

³ Rovatunk lezárásakor jutott tudomásunkra hogy M. DEHN, *Bogen und Sehnen im Kreis, Paare von Grössensystemen* c. dolgozatában (Norske Vid. Selsk., Forh., 13, 1941, p. 103—106) éppen ezt a tételt bizonyítja.

A 16. feladat első megoldása.

A következő általánosabb tételt bizonyítjuk: Ha az $\widehat{A_0 A_m} = \widehat{B_0 B_n}$ körívbe két (önmagát nem metsző) $A_0 A_1 A_2 \dots A_{m-1} A_m$ és $B_0 B_1 B_2 \dots B_{n-1} B_n$ sokszög van beírva és $\widehat{B_\nu B_{\nu+1}} < \widehat{A_\mu A_{\mu+1}}$ ($\mu = 0, 1, \dots, m-1$; $\nu = 0, 1, \dots, n-1$), akkor

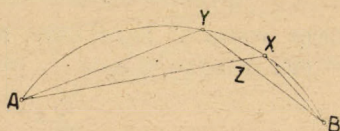
$$\widehat{B_0 B_1 \dots B_n} > \widehat{A_0 A_1 \dots A_m} \quad (\overline{XYZ \dots WT} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \dots + \overline{WT}).$$

Először kimutatjuk a következő segédételt: Ha az \widehat{AB} körív X és Y pontjaira nézve

$$\widehat{AX} > \widehat{AY} \geq \widehat{YB} > \widehat{XB},$$

akkor

$$\overline{AYB} > \overline{AXB}.$$



Ekkor ugyanis \overline{AX} és \overline{BY} metszéspontját Z -vel jelölve, $AYZ\Delta \sim BZX\Delta$, tehát

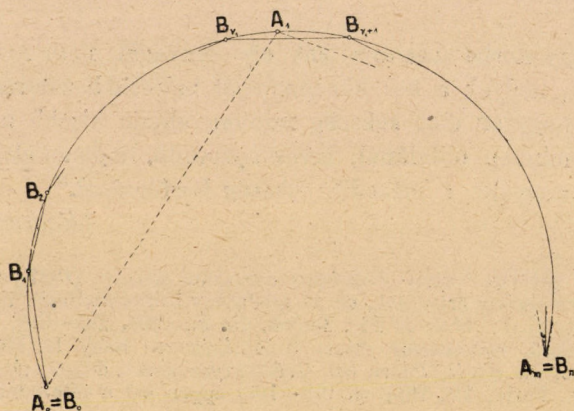
$$\overline{BX} = \overline{AY} \cdot q, \quad \overline{XZ} = \overline{YZ} \cdot q, \quad \overline{BZ} = \overline{AZ} \cdot q, \quad (0 < q < 1)$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \overline{AYB} - \overline{AXB} &= \overline{AY} + \overline{YZ} + \overline{ZB} - (\overline{AZ} + \overline{ZX} + \overline{XB}) = \\ &= \overline{AY} + \overline{YZ} + \overline{AZ} \cdot q - \overline{AZ} - \overline{YZ} \cdot q - \overline{AY} \cdot q = \\ &= (\overline{AY} + \overline{YZ} - \overline{AZ}) (1 - q) > 0, \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

Legyen az A_μ, B_ν szögpontok sorrendje a köríven:

$$A_0 = B_0 \{ B_1 \{ \dots \{ B_{r_1} \{ A_1 \{ B_{r_1+1} \{ \dots \{ B_{r_2} \{ A_2 \{ B_{r_2+1} \{ \dots \{ A_m = B_n.$$



Ekkor a háromszögegyenlőtlenség és a fenti segédétel ismételt alkalmazásával adódik:

$$\overline{A_0 B_1 \dots B_{r_1} B_{r_1+1} \dots B_n} \geq \overline{A_0 B_1 B_{r_1+1} \dots B_n} > \overline{A_0 A_1 B_{r_1+1} \dots B_n} > \overline{A_0 A_1 A_2 B_{r_1+1} \dots B_n} > \overline{A_0 A_1 \dots A_m}, \text{ q. e. d.}$$

Ha ezt az eredményt olyan teljes körbe írt zárt sokszögekre alkalmazzuk, melyek a középpontot belsejükben tartalmazzák, akkor $\overline{A_\mu A_{\mu+1}} > \overline{B_r B_{r+1}}$ -ből következik $\widehat{A_\mu A_{\mu+1}} > \widehat{B_r B_{r+1}}$, ezenkívül az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a két sokszögnek van közös szögpontja, így tehát fenti tételünk a feladatban kimondott állítást magában foglalja.

(Egerváry Jenő)

A 16. feladat második megoldása.

Jelölje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ az r sugarú körbe írt nagyobb oldalú, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ pedig a kisebb oldalú sokszög egyes oldalaihoz tartozó középponti szögek felét. A feltétel értelmében $\alpha_i > \beta_j$ ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$), található tehát olyan γ , melyre nézve $\alpha_i > \gamma > \beta_j$. Azt állítjuk, hogy

$$\frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} < \frac{\sin \gamma}{\gamma} \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

A $\sin x$ függvény ugyanis felülről konvex a $(0, \pi)$ intervallumban, tehát a $\frac{\sin x}{x}$ különbségi hányados legalább is $(0, \pi)$ -ben monoton csökkenő függvénye x -nek, vagyis állításunk az evidens $0 < \gamma < \alpha_i < \pi$ egyenlőtlenség közvetlen folyománya. Ebből viszont a nagyobb oldalú sokszög kerületére a

$$2r \sum_{i=1}^m \sin \alpha_i < 2r \frac{\sin \gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^m \alpha_i$$

megbecslést nyerjük. Itt $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \pi$, mert feltevésünk értelmében olyan zárt sokszöggel van dolgunk, mely a középpontot tartalmazza, vagyis középponti szögeinek összege 2π . E szerint tehát egyrészt

$$2r \sum_{i=1}^m \sin \alpha_i < 2r\pi \frac{\sin \gamma}{\gamma},$$

másrészt a $\beta_j < \gamma$ reláció felhasználásával ugyanezen a módon következik, hogy

$$2r \sum_{j=1}^n \sin \beta_j > 2r\pi \frac{\sin \gamma}{\gamma},$$

s e két egyenlőtlenség épp állításunkat fejezi ki.

A 16. feladat harmadik megoldása.

A megoldás közvetlenül nyerhető a következő ismert tételből:¹
Ha

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k,$$

de minden $m \leq n-1$ indexre

$$\sum_{k=1}^m a_k > \sum_{k=1}^m b_k,$$

akkor bármely felülről konvex $f(x)$ függvényre

$$\sum_{k=1}^n f(a_k) < \sum_{k=1}^n f(b_k).$$

A második megoldásban közölt jelöléseket megtartva, legyen $a_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) és $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_n = 0$, továbbá $b_j = \beta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Válasszuk még $f(x)$ -ként a $(0, \pi)$ -ben felülről konvex $\sin x$ függvényt; akkor a közölt tétel feltételei ki vannak elégítve, minek folytán a két sokszög kerületére nézve következik az állított egyenlőtlenség, t. i.

$$2r \sum_{i=1}^m \sin \alpha_i < 2r \sum_{j=1}^n \sin \beta_j.$$

A 16. feladat megoldását beküldötték: FILA JENŐ, PATAKY LAJOS, ifj. SARKADI KÁROLY, ZIGÁNY FERENC, akiknek bizonyítása a fenti második megoldásban adott bizonyítással lényegileg megegyezik, továbbá TURÁN PÁL, aki a fenti harmadik megoldásban idézett tétel egy speciális esetét bizonyítja és alkalmazza.

¹ G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA, Inequalities (Cambridge, 1934), p. 89. (Theorem 108.)

IRODALOM.

Krbek Franz : A fizika mint élmény. Fordította Aujeszký László. I—VIII és 1—360 oldal. Budapest 1943. Kiadja a Magyar Természettudományi Társulat.

KRBEK könyve ama újonnan kialakult irodalmi műfajhoz tartozik, melyet COLEBUS és GAMOW ismert művei vezettek be és melynek célja elvont matematikai és fizikai elgondolásokat a közönség szélesebb rétegeinek könnyed tárgyalás és humoros megjegyzések és képek segítségével hozzáférhetővé tenni. A könyv címe és a fejezetek címei is úgy vannak megfogalmazva, amint azt hirdetéseknél szokták: «A földet ki akarták emelni sarkaiból», «Galilei felhág a pizai ferde-toronyra, de csak a következő fejezetben», «Egy katona, ki zavarban van» stb. Ez kétségtől eltekintve a zsurnalisztikus módszer betörése a népszerűsítő irodalomba és egyik tünete annak a nivelláló, ellaposító, a tömegek igényeit elsősorban szemmel tartó irányzatnak, mely a mai korra annyira jellemző.

KRBEK kitűzött feladatát nem ügyetlenül és nem minden szellemesség nélkül oldotta meg. A klasszikus és a modern fizika, valamint a matematika régebbi és újabb problémáinak nagy sokaságát mutatja be az olvasónak könnyed, gyors iramban átfutva rajtuk. Könyve három részből áll. Az elsőben a klasszikus mechanika néhány alapfogalmának kialakulását tárgyalja MACH híres művéhez szorosan csatlakozva, továbbá az integrálszámítás, a relativitáselmélet és a kvantumelmélet kezdeteit, valamint az elektromágneses fényelméletet. Tehát sokat markol és ezért az olvasó alig kap képet a dolgokról.

A túlkönnyed tárgyalás egy helyen súlyos tévedéshez is vezetett. Így a 39—40. oldalon kifejti egy örökmozgó lehetőségét. Egy körfolyamatot ír le, mely szerint munkanyereséggel jár. Egy súlyt felemel egy méterre, azután vízszintesen eltolja a Föld oly helyére, hol a földnehézség nagyobb, egy méterre hagyja esni és azután az alsóbb szinten eredeti helyére viszi vissza. Képet is közöl hozzá és meg-

jegyzi, hogy ez azért lehetséges, mert a földnehezség nem konzervatív erő! Félek, hogy ez a naív és teljesen hibás okoskodás, melynél nem veszi tekintetbe, hogy ha az erő változik, a nívófelületek távolsága is változik, főképp azok körében, kiknek a könyv szánva van, nagy zavart fog kelteni és felbátorítja a felfedezőket, kik tudományos ponyváikkal az Akadémiákat elárasztják.

Még azt is meg kell említeni, hogy sem a relativitáselméletnél, sem a kvantumelméletnél az alapvető tapasztalatok nincsenek felsorolva.

A második részben a matematikai gondolkodást mutatja be számos problémán. Szóba kerülnek az integrál- és differenciálszámítás, a határérték fogalma, az analitikai geometria, a RIEMANN-féle tér, a vektor fogalma, a halmazelmélet, a HILBERT-féle tér és az operátor fogalma, a valószínűségszámítás és a topológia. Igen ügyesen el tudja érni azt, hogy az olvasó sejt valamit, hogy miről van szó, néha többet, néha kevesebbet. Kényesebb és elvontabb fogalmaktól sem riad vissza. Így meglepő egyszerűen vezeti be a csoport, a normális osztó, a gyűrű és az ideál fogalmait olymódon, hogy előbb a homomorf leképezést definiálja és annak segítségével definiálja a normálosztót és az ideált. A GALOIS-féle elmélet gondolatmenetét is vázolja. Itt csak azt nélkülözzük, hogy nem hoz több konkrét példát, például csoportokra néhány geometriai példát és nem mutatja meg szintén konkrét esetben, hogy mit kell egy csoport szerkezete alatt érteni. A topológiát a Königsbergi hidak problémáján mutatja be. Ez túlkeves arra, hogy a topológiáról fogalmat adjon, jobb lett volna, ha nem is említi.

A harmadik részben kissé rendszeresebben tárgyalja a mechanika néhány fogalmát, a relativitáselméletet és a kvantummechanikát.

A NEWTON-féle axiómák tárgyalása nem egészen szerencsés és főképp nem áll meg az az állítása, hogy a harmadik axióma a mechanika felépítésében nélkülözhető, mert már a súlypont mozgására vonatkozó tételben sem nélkülözhetjük.

Vannak azonban más téves állításai is. Így a 338. oldalon azt állítja, hogy a DIRAC-féle elméletben egy negatív töltésű és negatív energiájú elektron úgy viselkedik, mint egy pozitív töltésű és pozitív energiájú elektron. Ez egyáltalában nincs így és ép ezért vezette be DIRAC a γ - μ -elméletet, melyet KRBEK a következő oldalon kissé zavarosan meg is említ. Alkalmi megjegyzései a magerőkre és kvantum-elektrodinamikára arra mutatnak, hogy ezekkel az elméletekkel kevésbé barátkozott meg.

A 336. és 337. oldalon használja a relativitáselméletben szokásos

jelölést, mely szerint kétszer előforduló indexek összegezést jelentenek és az összegezés jelét nem írják ki. Ezt azonban egy népszerű könyvben ki kell emelni.

Javára kell írunk, hogy sokat és sokfélét nyújt, igen elvont dolgokról tud némi fogalmat adni, vagy legalább sejtetni, hogy miről van szó. Ezt nem szabad kevésre becsülni, mert így sok fogalom észrevétlenül átmegy a köztudatban és egy oly légkör jön létre, mely megkönnyíti oly elméletek felfogását, melyek azelőtt igen nehezeknek látszottak.

A fordító, AUJESZKY LÁSZLÓ, gondos fordítást nyújtott és néhány magyarázó megjegyzést fűzött hozzá. Kár, hogy néhány általánosan elfogadott magyar tudományos kifejezést más szóval pótol. Így «határátlépést» használ «határártmenet» helyett és «halmazódási helyet» «torlódási hely» helyett. Remélem, hogy a kiadó, a Természettudományi Társulat egy új kiadása esetében gondoskodni fog a feltűnőbb hiányok kiigazításáról.

Ortway Rudolf.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1943. évi XLVII. matematikai tanulóversenyről.

A versenyt 1943. okt. 16-án tartottuk meg. Budapesten 42, Kolozsvárott 4 és Szegeden 8 versenyző jelentkezett; beadott Budapesten 26, Kolozsvárott 2 és Szegeden 4, összesen tehát 32 dolgozat. A tételek a következők voltak:

I. Bebizonyítandó, hogy bármely társaság azon tagjainak a száma, akiknek e társaságban páratlan számú ismerősük van, mindenkor páros.

II. Jelentsen P egy hegyesszögű háromszög belsejében fekvő pontot. Bebizonyítandó, hogy a háromszög területén fekvő pontoknak P -től való távolságai közül a legnagyobb (D) legalább kétszer akkora, mint a legkisebb (d). Mikor áll fenn $D=2d$?

III. Legyen $a < b < c < d$. Hány különböző értéket vesz fel

$$u = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2,$$

ha x, y, z, t helyébe valamilyen sorrendben az a, b, c, d számokat helyettesítjük? Milyen sorrendeknek felel meg u legnagyobb, illetőleg legkisebb értéke?

A kiküldött bírálóbizottság tagjai voltak KÖNIG DÉNES elnökle alatt EGERVÁRY JENŐ, FARAGÓ ANDOR, SZÜCS ADOLF, VERESS PÁL és HAJÓS GYÖRGY előadó. (Kimentették magukat FEJÉR LIPÓT és STACHÓ TIBOR.) E bizottság okt. 25-én tartott ülésén HAJÓS GYÖRGY előadó előterjesztése alapján a következő egyhangú javaslatban állapodott meg.

„Az első b. Eötvös-jutalomra javasoljuk ÁDÁM ISTVÁN dolgozatát. Ő az egyetlen, aki mind a három feladatot kifogástalanul megoldotta. Különösen kiemelkedik a legnehezebbnek bizonyult II. feladatra adott szép megoldása. A második b. Eötvös-jutalmat TAKÁCS LAJOS érdemli, aki kitűnik tömör és világos fogalmazásával és csak annyiban marad el az első helyre helyezett versenyző mögött, hogy a II. feladat megoldásánál be nem bizonyított és csak szemléletesen igaznak mutakozó

állításra is hivatkozik. — ÁDÁM ISTVÁN a budapesti áll. b. Kemény Zsigmond gimnáziumban Neukomm Gyula tanárnak, TAKÁCS LAJOS pedig a budapesti b. Wesselényi Miklós felső kereskedelmi iskolában Vörös Dezső és Hives Á. Gergely tanároknak tanítványa volt. — Végül dícséretet érdemel GEHÉR ISTVÁN, akinek érdeme, hogy a II. feladatra hiánytalan bizonyítást adott, habár csak ezt a feladatot oldotta meg teljesen.»

A bizottság e javaslatát a Választmány 1943. nov. 11-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésén POGÁNY BÉLA elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Ádám István jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Összesen páros számú ismeretség van. Jelöljük számukat $2k$ -val. Ugyanis, ha A ismeri B -t, B is ismeri A -t és így minden ismeretségnek megfelel egy tőle különböző ismeretség. Legyen n azoknak a száma, akiknek páros, m pedig azoknak a száma, akiknek páratlan számú ismerősük van. Ha a páros ismeretségi tagok ismeretségének számát $2k_1, 2k_2, \dots, 2k_n$ -nel, a páratlanokét $(2k'_1+1), (2k'_2+1), \dots, (2k'_m+1)$ -el jelöljük, akkor ezek összege megadja az ismeretségek számát, vagyis

$$2k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_n + (2k'_1+1) + (2k'_2+1) + \dots + (2k'_m+1) = 2k,$$

ahonnan

$$2(k_1 + k_2 + \dots + k_n + k'_1 + k'_2 + \dots + k'_m) + m = 2k,$$

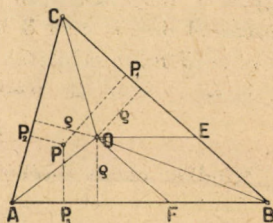
ebből

$$m = 2k - 2(k_1 + \dots + k_n + k'_1 + \dots + k'_m),$$

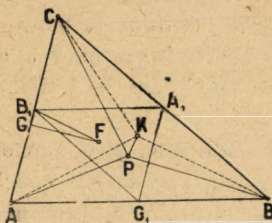
tehát a páratlan ismerősű tagok száma páros.

II. tétel. Segéd-tétel: Ha P a háromszög belső pontja, akkor az oldalaktól való távolságai közül a legkisebb nem nagyobb a beírt kör sugaránál, a legnagyobb pedig nem kisebb annál.

Legyen O a beírt kör középpontja. P az AOC , AOB vagy BOC háromszögek valamelyikébe esik (vagy a kerületére). Essen például az AOC_Δ -be. Ekkor ennek a háromszögnek az AC oldalától a leg-távolabb lévő pontja O és így $PP_2 \leq \rho$. Ha O -n keresztül meghúzzuk az $OE \parallel AB$ és $OF \parallel CB$ egyeneseket, P nem eshet az $OEBF$ négyszögbe, mivel az AOC_Δ -be esik, tehát vagy CB -től vagy AB -től távolabb van, mint ρ . Ezzel a segéd-tételt bebizonyítottuk. (Egyenlőség csak $P \equiv O$ esetén.)



Legyenek A_1, B_1, C_1 az oldalfelező pontok, K az ABC_Δ , F az $A_1B_1C_1$ háromszög köréírt körének középpontja. Mivel F a háromszög



belső pontja (a háromszög hegyesszögű), azért, ha például FG a legnagyobb távolság az oldalaktól, akkor a segédvétel értelmében

$$FG \geq \rho, \text{ és így méginkább } FB_1 = \frac{r}{2} \geq \rho$$

(hol ρ a beírt, r a körülírt kör sugara).

(Ezt EULER tételéből is kaphattuk volna:

$$l^2 = r^2 - 2\rho^2 \text{ és így } \rho \leq \frac{r}{2}.)$$

A kerületi pontok közül nyilván az a pont van P -hez legközelebb, amelyik a P -hez legközelebb fekvő oldalra a P -ből bocsátott merőleges talppontja. De a segédvétel értelmében ez a távolság $d \leq \rho \leq \frac{r}{2}$.

A kerületi pontok közül a legnagyobb távolságra nyilván a P -től legtávolabb eső csúcs van. Azonban ez a távolság $D \geq r$. Ugyanis a PK a KA , KB és KC egyenesek valamelyikével tompaszöveget zár be (mivel CKB_Δ , AKC_Δ , AKB_Δ közül egyik sem nagyobb, mint 180°). Legyen például KC az, mellyel tompaszöveget zár be. Ekkor tehát a PKC háromszögben $PC > KC = r$. Ha volna nagyobb távolság, akkor arra méginkább $D > r$. Ha P azonos K -val, akkor éppen $D = r$. Bebizonyítottuk tehát, hogy $D \geq r \geq 2d$.

Egyenlőség csak akkor lehet, ha P azonos O -val és P azonos K -val. De ekkor O azonos K -val, vagyis a háromszög egyenlőoldalú és P a középpontjában van.

III. tétel. Ha a, b, c, d valamely sorrendje adva van, és itt az elemeket ciklikusan felcseréljük, u nyilvánvalóan nem változik. Tehát egyszerűség kedvéért $x=a$ tételezhető fel. Ha egy sorrend a, i_1, i_2, i_3 , akkor u értéke nem változik, ha a, i_3, i_2, i_1 sorrendet veszünk, amiről egyszerű helyettesítéssel meggyőződhetünk. Az i_1, i_2, i_3 hatféle elrendezéséből tehát csak 3 lehet különböző. Ezek valóban különbözők a következő megfontolások szerint:

Mivel $c < d$ és $b - a > 0$, azért $c(b - a) < d(b - a)$, vagyis

$$bc + ad < bd + ca.$$

Mindkét oldalt 2-vel szorozva és ellenkező jellel véve

$$-2bc - 2ad > -2bd - 2ca,$$

hozzáadva mindkét oldalhoz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a-b)^2 + (c-d)^2$ értéket:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 > \\ > (a-b)^2 + (b-d)^2 + (d-c)^2 + (c-a)^2. \end{aligned}$$

Ugyanílyen módon $a > d$ és $c - b > 0$ miatt $ac - ab < cd - bd$ és így

$$-2ab - 2cd < -2ac - 2bd.$$

Hozzáadva az $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (b-c)^2 + (d-a)^2$ értéket:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 > \\ > (a-c)^2 + (c-b)^2 + (b-d)^2 + (d-a)^2. \end{aligned}$$

Vagyis

$$u(a, c, b, d) > u(a, b, c, d) > u(a, b, d, c).$$

Ezek tehát valóban különbözők, és így a nagyságssorrendet is megállapítottuk.

Az ezekből ciklikus felcseréléssel és az utolsó 3 fordított sorrendjével nyert értékek közt szintén fennáll ez az egyenlőtlenség.

Takács Lajos jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Kéttagú társaság esetén a tétel nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy tételünk n tagú társaság esetén igaz, bizonyítsuk be, hogy $n+1$ tagú társaság esetén is igaz. Legyen egy n tagú társaságban a páratlan ismerősű tagok száma $2k$, akkor a páros ismerőssel bíró tagok száma $n-2k$.

Belép a társaságba egy új, az $(n+1)$ -ik tag. Ha az új tagnak ismerőse nincs, úgy változást nem okoz. Ha ismerőseinek száma $a+b$, mégpedig a páratlan ismerősű tagok közül a , a páros ismerősű tagok közül b , úgy a következő változás áll be:

Az eredetileg páratlan ismerőssel bíró tagok száma $(2k)$ a -val csökken, s ez az a számú tag páros ismerőssel bíró taggá változik. A páros ismerőssel bíró tagok közül b páratlan ismerősűvé változik, $n-2k-b$ pedig marad páros ismerőssel bíró tag. Ezek szerint az n tag közül $(2k-a)+b=2k+b-a$ bír páratlan ismerőssel.

Ha az új tag ismerőseinek száma $a+b$ páros szám, úgy ő nem jön számításba a páratlan ismerőssel bíró tagoknál. Tehát a páratlan ismerősű tagok száma az $n+1$ tagú társaságban $2k+b-a$. Ha azonban $a+b$ páros szám, úgy $b-a$ is az. Tehát $2k+b-a$ páros szám.

Ha az új tag ismerőseinek száma $a+b$ páratlan, úgy ő is tekintetbe jön a páratlan ismerősű tagok számbavételénél. Tehát a páratlan ismerősű tagok száma az $n+1$ tagú társaságban $2k+b-a+1$, hol $a+b$ páratlan. Ha $a+b$ páratlan, úgy $b-a$ is az, tehát a páratlan ismerősű tagok száma az $n+1$ tagú társaságban páros. Q. e. d.

(Jegyzet. $(a+b)=(b-a)+2a$, tehát ha $a+b$ páros, úgy $b-a$ is az, ha $a+b$ páratlan, úgy $b-a$ is az.)

II. tétel. Jelentse a hegyesszögű háromszögbe beírt kör sugarát ρ , a háromszög köré írt kör sugarát pedig r .

EULER tétele szerint $a^2=r^2-2r\rho$, hol a jelenti a háromszögbe írható kör középpontjának távolságát a háromszög köré írható kör középpontjától. Ezért $0 \leq r^2 - 2r\rho$, miből $2\rho \leq r$.

A háromszög belsejében kiválasztott P pontnak a kerülettől vett legkisebb távolsága d nem lehet nagyobb, mint ρ ; a legnagyobb távolság D pedig nem lehet kisebb, mint r , azaz $d \leq \rho$ és $r \leq D$. Ennek alkalmazásával $2\rho \leq r$ a következő alakot ölti: $2d \leq D$, q. e. d.

Mikor lesz $2d = D$? Ha $d = \rho$, $r = D$ és $2\rho = r$, vagyis $a = 0$, azaz a körülírt kör középpontja egybeesik a belül írt kör középpontjával. Ez az eset a szabályos háromszögnél következik be.

III. tétel. Végezzük el a műveleteket:

$$u = 2[(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - (y+t)(x+z)].$$

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ értéke a, b, c, d helyettesítési sorrendjétől független. Kérdés, hány különböző értéket vehet föl $(y+t)(x+z)$ az a, b, c, d helyettesítése mellett. Az ismétlés nélküli kombináció értelmében 4 elemből alkotható 2-esek száma $\binom{4}{2} = 6$. A szorzat értéke azonban a tényezők sorrendjétől független, tehát az előbbi érték felét kell venni, azaz u , az a, b, c, d helyettesítések mellett, 3 különböző értéket vehet fel.

A legnagyobb, illetőleg legkisebb érték eldöntésénél csak $(y+t)(x+z)$ játszik szerepet. Alkossuk meg ennek 3 különböző értékét:

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd,$$

$$(a+c)(b+d) = ab + cb + ad + cd,$$

$$(a+d)(b+c) = ab + db + ac + dc.$$

Itt: $ac + bc + ad + bd < ab + cb + ad + cd < ab + db + ac + dc$. Ugyanis $ac + bc + ad + bd < ab + cb + ad + cd$, $ac + bd < ab + cd$, azaz $a(c-b) < d(c-b)$, $a < d$, ez pedig a feltétel szerint igaz. Másrészt $ab + cb + ad + cd < ab + db + ac + dc$, $cb + ad < db + ac$, azaz $c(b-a) < d(b-a)$, $c < d$; ez pedig igaz.

Maximális értéket kapunk, ha $(y+t)(x+z)$ értéke a legkisebb, azaz például $y=a, t=b, x=c, z=d$.

Minimális értéket kapunk, ha $(y+t)(x+z)$ értéke a legnagyobb, azaz például $y=a, t=d, x=b, z=c$.

Jelentés az 1943. évi XXV. Károly Irén fizikai tanulmányversenyéről.

Társulatunk ezt a versenyt 1943. évi október 23-án tartotta meg Budapesten, Kolozsváron és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 28 versenyző jelentkezett, Kolozsváron 3, Szegeden 4. Budapesten 27 adott be dolgozatot, Kolozsváron 2, Szegeden mind a négy. A 35 jelentkező közül tehát 33 adott be dolgozatot.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Üres bádoggkockába, melynek élei (belül) $1\cdot 01$ dm hosszúak, $[(1\cdot 01)^3 - 1]$ dm³ vizet töltünk, azután 1 dm³-es, parafinnal átitatott parafa-kockát teszünk bele. Úszik-e ez ott a vizen?

2. Vízszintes tengelyű, hengeralakú, zárt edény színültig meg van töltve vízzel. Az edény vizében három golyó van (A, B, C). Az A golyó közepsűrűsége 1-nél kisebb, C golyóé 1-nél nagyobb, B golyó sűrűsége pedig egyenlő 1-gyel. Hogyan fognak viselkedni a golyók, ha az edény, tengelye irányában, hirtelen lökés következtében néhány centiméterre kimozdul helyéből?

3. Jules Verne «Utazás a Holdba» c. híres regényében leírja azokat a jelenségeket, melyeket a Holdba kilőtt lövedék utasai észlelnek, amint a lövedék ama semleges ponthoz közeledik, melyben a Föld és a Hold ellenkező irányú vonzása egyensúlyt tart:

«Miről fogják észrevenni, mikor a semleges pontba érkeznek? Ott testük és minden test elveszti súlyát és a nehézkedés összes jelenségei megszűnnek.

Valóban már reggel óta nevezetes könnyebbülést, bizonyos súlytalanságot kezdettek érezni, mely bár abszolút nem volt, de elég arra, hogy érezhetővé váljék. Egyszerre Nichol egy poharat kiejtett kezéből s az csak függve maradt a levegőben. Bármilyen tárggyal ismételték a kísérletet, mindenik ott maradt, ahová állították, minden alapzat nélkül... Föl, le, oldalt, rézsút menni, szállni, úgyszólván csak a gondolatától és akarattól függött. Testök elveszítette minden súlyát. A semleges pontban voltak.»

Azután leírja, hogy a semleges ponton túlhaladva, a tárgyak a Hold felé kezdenek nehézkedni és a lövedék alsó része, melyben tömegközéppontja volt, lassankint átfordult a Hold felé.

Megállapítandó és megindokolandó, hogy ez az elgondolás mennyiben helyes, illetőleg helytelen.

A dolgozatokat elbíráló bizottság, melynek elnöke POGÁNY BÉLA, tagjai HOFFMANN ERNŐ, MIKOLA SÁNDOR, ORTVAY RUDOLF, RYBÁR

ISTVÁN, SARKADI KÁROLY és SZABÓ GÁBOR — utóbbi, mint előadó — voltak, 1943. évi november 6-án tartott ülésén azt határozta el, hogy a következő jelentést és javaslatot terjeszti a Választmány elé:

„Az 1. feladatot legtöbbször felesleges számítások végzésével oldották meg. Akik nem tudták megoldani, abba a hibába estek, amely hibának a valószínű elkövetésére a bizottság a feladat kitévésekor gondolt is. Úgy okoskodtak t. i., hogy mivel nincs annyi víz az edényben, amennyinek a súlya egyenlő lenne a besüllyesztett parafa-kocka súlyával, azért a parafa-kocka nem úszhatik.

A 2. feladatot teljesen csak néhányan oldották meg; részben azonban majdnem mindnyájan.

A 3. feladatot többen oldották meg jól. Voltak olyanok, akik nem helyesen fogták fel a feladatot és olyan kérdéseket fejtegettek, amelyek nem tartoznak a feladat kérdései közé. Így: Lehetséges volna-e olyan nagy kezdősebességet adni valamely lövedéknek, hogy eljusson a Holdba? Milyen pályán mozogna az ilyen lövedék? Lehetséges volna-e, hogy emberek legyenek a lövedékben? stb.

Kevés hibával, vagy kevés hiánnyal több versenyző is megoldotta mind a három feladatot. Ezért a verseny eredményét jónak mondhatjuk. Legjobb a VÉSEI LÁSZLÓ és KOLLÁNYI MIKLÓS dolgozata. Mind a kettő hibátlan, szabatos és rövid. Csak az utóbbi a 2. feladat megoldásában nem annyira teljes, mint az előbbi.

Tisztelettel javasolja a bizottság, hogy a Választmány a VÉSEI LÁSZLÓ dolgozatát az első Károly Irén-díjjal, a KOLLÁNYI MIKLÓSt pedig a második díjjal tüntesse ki. VÉSEI LÁSZLÓ a debreceni piarista gimn.-ban végzett és dr. Pintér Mihály tanítványa volt. KOLLÁNYI MIKLÓS a kaposvári Somssich gimn.-ban végzett és Ercsei Jakab tanítványa volt. Javasolja továbbá, hogy vitéz ADLER RÁCZ JÓZSEF, KEMÉNY DEZSŐ és ÁDÁM ISTVÁN dolgozatait, amelyek értékben közel állanak a fentebbiekhez, dícséretben részesítse. Vitéz ADLER RÁCZ JÓZSEF és KEMÉNY DEZSŐ a budapesti piarista gimn.-ban végzett; előbbinek Szita Imre, utóbbinak Öveges József volt a tanára. ÁDÁM ISTVÁN a budapesti Kemény Zsigmond gimn.-ban végzett és tanára Hegyi Ferenc volt.

A Választmány a bizottságnak ezt a jelentését és javaslatát 1943. évi november 11-én tartott ülésén tudomásul vette és egyhangúlag elfogadta. A választmányi ülést követő előadó-ülésen POGÁNY BÉLA, a Társulat elnöke, kihirdette a verseny eredményét és a díjakat a nyerteseknek buzdító szavak kíséretében átadta.

KIMUTATÁS

az 1943. évi április 1-től 1943. évi október 31-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1927-re: Boharsik Pál (6), Bródy Imre (8), Girsik Géza (3), Lipka István (6), Schay Géza (8), Széky István (6).

1928-ra: Boharsik Pál (4), Bródy Imre (8), Girsik Géza (8), Jakab Györgyné (8), Lassovszky Károly (4), Lipka István (6), Neubauer Konstantin (3), Schay Géza (8).

1929-re: Bolla Györgyné (2.4), Cseh Elekné (8), Endrédy Vendel (8), Girsik Géza (8), Jakab Györgyné (8), Lassovszky Károly (8), Lipka István (6).

1930-ra: Bródy Imre (8), Cholnoky Jenő (4), Darkó Béla (2), Endrédy Vendel (8), Girsik Géza (8), Lassovszky Károly (8).

1931-re: Cholnoky Jenő (8), Hausbrunner Vilmos (1), König Dénes (8), Mischung Ilona (6).

1932-re: Ferenczy Zoltán (4), König Dénes (8), Mischung Ilona (6).

1933-ra: Bolla Györgyné (8), König Dénes (8).

1934-re: König Dénes (8).

1935-re: König Dénes (8).

1936-ra: König Dénes (8).

1937-re: König Dénes (8).

1938-ra: König Dénes (8), Skopál István (8).

1939-re: König Dénes (8), Maróthi Ferenc (3), Skopál István (8).

1940-re: Ferenczy Zoltán (6), König Dénes (8), Maróthi Ferenc (8), Stachó Lajos (6), Széky István (6).

1941-re: Boér Lászlóné (2), Boharsik Pál (5), Cholnoky Jenő (8), Egyed László (4), Ferenczy Zoltán (8), Fraknóy József (8), Girsik Géza (8), König Dénes (8), Lajta Ernő (8), Maróthi Ferenc (8), Neubauer Konstantin (8), Patai Imre (8), Riesz Frigyes (6), Stachó Lajos (6), Széky István (6), Tarnóczy Tamás (6).

1942-re: Abody Előd (8), Barta József (8), Boér Lászlóné (6), Bolla Györgyné (8), Bukovszky Ferenc (6), Császár Elemér (6), Cseh Elekné (8), Oseke Vilmos (6), Cservény Albin (6), Dér Zoltán (3), Egyed László (4), Fenyő István (8), Ferenczy Zoltán (8), Fraknóy József (8), Frank János (4), Fröhlich Pál (6), Gáspár Rezső (6), Girsik Géza (8), Halmágyi László (8), Hausbrunner Vilmos (8), Heuer Ede (8), Jendrassik György (8), Kedves Miklós (6), Komjáthy Aladár (8), König Dénes (8), Lajta Ernő (4), Magi Ferenc (6), Maróthi Ferenc (8), Misángyi Vilmos (8), Mitnyán László (6), Szőkefalvi Nagy Béla (6), Neogrády Sándorné (8), Neubauer Konstantin (8), Novobátszky Károly (8), Papp Margit (8), Patai Imre (8), Riesz Frigyes (6), Róth Antal (6), Schay Géza (8), Somogyi Antal (8), Steiner Lajos (6), Szabó Gusztáv (8), Szász Pál (8), Szebehely Győző (8), Széky István (6), Széll Kálmán (6), Szép Jenő (8), Tarnóczy Tamás (6), Tolnai Jenő (8), Tóth Ferenc (6), Zányi László (6).

1943-ra: Abody Előd (8), Bacsó Vilmos (6), Bacsoni Jenő (8), Barta József (8), Bay Zoltán (8), Békésy György (8), Boér Lászlóné (6), Bolla Györgyné (8), Borbély Samu (6), Budó Ágoston (6), Bukovszky Ferenc (6), Csaplár Konrád (6), Császár Elemér (6), Cseh Elekné (8), Cseke Vilmos (6), Cservény Albin (6), Csízhegyi Lajos (6), Darkó Béla (6), Dér Zoltán (6), Endrédy Vendel (6), Erőd János (6), Faragó Andor (8), Feldheim Ervin (8), Fenyő István (8), Ferenczy Zoltán (8), Fila Jenő (6), Fraknóy József (8), Frank János (6), Fröhlich Pál (6), Gausz József (6), Gáspár Rezső (6), Girsik Géza (2), Gyíres Béla (6), Haáz István (6), Hajós Géza (6), Halmágyi László (8), Hausbrunner Vilmos (1), Hárs János (8), Heuer Ede (8), Hollaky Ilona (6), Jáky József (8), Jendrassik György (8), Kalmár László (6), Kárteszi Ferenc (8), Kedves Miklós (6), Kelemen Szulpic (6), Komjáthy Aladár (8), Kovács István (8), König Dénes (8), Lassovszky Károly (8), Lázár Dezső (6), Luckhaub Gyula (6), Magi Ferenc (6), Maróthi Ferenc (8), Márton Sámuel (6), Megyesi István (8), Misángyi Vilmos (8), Mitnyán Mihály (6), Molnár József (6), Szőkefalvi Nagy Béla (6), Neogrady Sándorné (8), Neubauer Konstantin (8), Novobátszky Károly (8), Nyáry Béla (6), Papp Margit (8), Patai Imre (8), Pápai Nárcisz (6), Péter Gyula (8), Rados Ignác (8), Radó Simon (8), Renner János (8), Rédei László (6), Riesz Frigyes (6), Róth Antal (6), Sarkadi Károly (8), Sas Ernő (6), Sass Gábor (6), Schay Géza (8), Sebők Emánuel (6), Somogyi Antal (8), Sólyi Antal (6), Steiner Lajos (6), Szabó Gusztáv (8), Szalay Sándor (6), Szántó Sándor (8), Szász Pál (8), Szebehely Győző (8), Szele Tibor (6), Szemerey Andor (6), Székely István (6), Széll Kálmán (6), Szélpál István (6), Szép Jenő (8), Tarnóczy Tamás (6), Tihanyi Miklós (6), Tolnai Jenő (8), Tóth Ferenc (6), Török Tibor (6), Vajk Raul (8), Varga Zoltán (6), Vámos Sándor (6), Vescan Teofil (6), Végh Anna (6), Vörös Cirill (6), Zányi László (6).

1944-re: Bolla Györgyné (8), Faragó Andor (8), Ferenczy Zoltán (8), Rédei László (6), Sebők Emánuel (6).

2. Előfizetés.

Bernardinum (8), Békéscsabai ev. gimn. (18), Budapesti izr. gimn. (24), Budapesti ref. gimn. (8), Budapest székesfőváros (152), Csillagvizsgáló Budapest-Svábhegy (16), Debreceni ref. gimn. (12), Bl. Dolapcsiev (8), Ganz Villamossági (16), Kalazantinum (8), Kassai prem. gimn. (12), M. Ált. Kőszénbánya (8), M. Kat. Tanulmányi Alap 6 kat. gimn. (48), Meteorológiai Intézet (46), Műegyetemi Kémiai Fizikai Tan-szék (8), Nagykárolyi kegyesrendi gimn. (6), Norbertinum (22), Természettudományi Társulat (16), VKM 97 áll. gimn. (776).

3. Adomány, segély.

Szabó Gábor (8), Magyar Nemzeti Bank (5000), Államsegély 1942-re (500), Sasvári Géza (50), M. Tud. Akadémia 1943. II. (500).

Budapest, 1943. nov. 3.

Jelítai József pénztáros.

Felelős kiadó: Ortvay Rudolf.

Franklin-Társulat nyomdája — vitéz Litvay Ödön



A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőknek küldendőek és pedig a matematikai tárgyuak *König Dénes* műegyetemi c. ny. rkiv. tanár (Budapest, XI., Horthy Miklós-út 28, Lénárt-pensio), a fizikai tárgyuak pedig *Ortvay Rudolf*, egyetemi ny. r. tanár (Budapest, VIII., Múzeum-körút 4. C épület, Egyetemi elméleti fizikai intézet) címére. A benyújtott cikkek lehetőleg géppel irandók, a papírosnak csak egyik oldalára és ezen kb. 5 cm széles margó üresen hagyandó. Az ábrák külön lapon, sokszorosításra alkalmas formában és gondos kivitelben melléklendők. A képletek olvashatóan és kivétel nélkül kézzel irandók be. A különleges betűk és jelek a szedő számára megjelölendőek, illetőleg megmagyarázandók. Kérjük t. munkatársainkat, hogy kézírataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy kéziratukra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható. A különlenyomatokra vonatkozó kívánságok az utolsó (tördelt) korrekturán feltüntetendőek.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Ortvay Rudolf* titkár címére küldendőek.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, cím-változások *Jelitar József* pénztáros címére (Budapest, II., Bimbó-u. 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des geschäftsführenden Sekretärs *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/c.

Megvételre keressük

a Zeitschrift für Physik 41—103. köteteit (1927. januártól 1936. decemberig), esetleg egyes köteteket is. Ajánlatokat Orvostudományi Fizikai Intézet, Debrecen, Magoss György-tér 18/a címre kérünk.

Több mint 40 éve gyárt

tudományos műszereket,
korszerű műszereket,
optikai eszközöket,
elektromos mérőműszereket,

repülőgépműszereket.
laboratoriumi butorzatot,
vetítógépeket,
hangosfilmes gépeket

M A R X É S M A R X

Első Magyar Repülőműszergyár Budapest

Gyártmányait forgalomba hozza:

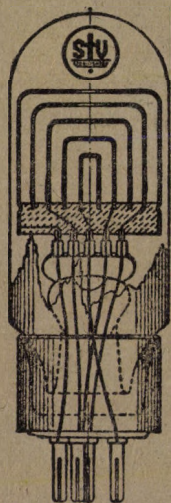
„MARXTON“ MARX FERENC

műszaki különlegességek szaküzlete

BUDAPEST, VI., VÁCI-ÚT 18. (a Nyugatinál)

Telefon: 122-110.

A „STABILISATOR“



az egyenirányítót vagy bármilyen más áramforrást
akkumulátorral egyenértékű, állandó feszültségű, kis
belsőellenállású áramforrássá alakítja át.

A «stabilizált» feszültség csak kb. $\pm 0,1\%$ -ot
változik $\pm 10\%$ tápláló feszültség ingadozásánál: kb.
1—2%-ot változik üresjárás és teljes terhelés között;
0,01%-ra függenek csak egymástól a részfeszültségek.

Tehetetlenség nélkül szabályoz. Önfogyasztás: né-
hány mA. A Stabilisator kicsi, könnyű, üzembiztos,
olcsó. Új típusok!

Elméleti és gyakorlati műszaki leírást kívánatra
díjtalanul küld a

STABILOVOLT GmbH

Berlin SW 68 Wilhelmstrasse 130

magyarországi képviselője

Dr. GOLDBERGER MIHÁLY

Budapest, VII., Bajza-utca 4. — Telefon: 1-425-09.